4410
II

1885. a. 142.

N. Inv. 4410

Po Brodowiczu dar

EX [illegible] DR S. BRODOWICZ

Zasady Trygonometryi

przez

A: K: Cybulskiego. Medycyny Doktora Professora Technologii i matematyki przy Szkole Technicznej Krakowskiej, Członka Towarzystwa Naukowego Krakowskiego.

Zeszyt [illegible] z [illegible] manuskryptu – przed [illegible] wydru-
[illegible] – [illegible] 24 Lut 848 [illegible] – bo
nie [illegible] aby [illegible] na [illegible]
[illegible] –

Jaśnie Wielmożnemu Panu

J. M. Brodowiczowi

Med. Dr. Okulistyki Magistrowi,
Professorowi nauki praktycznych lekarskich,
Dyrektorowi Kliniki Lekarskiej przy Uni-
wersytecie Jagellonskim, Kommissarzowi Rzą-
dowemu Instytutów naukowych W. M. Kra-
kowa i Jego Okręgu. Zastępcy Konserwa-
tora J. O. X. de Metternich, Członkowi
Towarzystwa naukowego Krakowskiego,
Wysłużonemu Dziekanowi Wydziału Le-
karskiego, Wysłużonemu Rektorowi Uni-
wersytetu Jagellonskiego i Prezesowi To-
warzystwa Naukowego Krakowskiego

w dowód jednostajnej
wdzięczności

Autor.

Przemowa

Lubo Trygonometrya, podobnie jako każda część matematyki, jest zbiorem jednych i tychże samych prawd, to przecież z powodu wykładu syntetycznego lub analitycznego, jakiego się w jej pisaniu trzymać można, wypaść może rozmaita. Rozmaitość ta powię-ksza się tem więcej, że tako w jednym jako drugim wykładzie, wiele można różnych i odmiennych sposobów dowodzenia jednej i tejże samej prawdy a nawet obrawszy jedną za główną i pier-wszą, inne z niej wyprowadzić; z której nawet przyczyny dla każdego obszerne i otwarte powstaje pole do pisania, ktokolwiek zwięzlej, jaśniej i dobitniej stara ją się wyłożyć lub w jaki sposób uprościć. I że na tem polu ucierają się rozmaicie siły, dowodem jest znaczna ilość dzieł, która się pomiędzy Francuzami i Niemcami (że tylko o nich wspomnę) w tym rodzaju pojawia. Tam albowiem nie raz jedna szczęśliwsza myśl, inny obrót nadany rzeczom ~~już~~ nawet znanym, nie ~~raz~~ jest już powodem wydania nowego dzieła, które wreszcie co do wartości wewnętrznej innych tego rodzaju pierwej wydanych przewyższyć nie może i tylko przez to jest godne, że nie jest prostym odpisem a zawsze ruch umysłowy oznacza. Liczne tego rodzaju przykłady spowodowały i mnie do na-pisania niniejszej Trygonometryi, którą starałem się wyłożyć analitycznie, z powodu, iż w niej synteza wszę-dzie wykładać się nie może, przez co dzieło traci na jedno-

stajność

stajność. Że z pracy mojej spłynąć może pożytek dla
naszej powszechności wnoszę stąd, że osobnej Trygonome-
tryi, któraby wszystko zamykała w sobie, co mieścić
powinna, w języku naszym nieposiadamy i stąd,
że ta Trygonometrya od każdego podobnego
dzieła, zdaje się różni. —

Wyprowadziłem linije trygonometryczne od koła, idąc
za dawnemi Autorami, tudzież za Legendrem i
Cauchy, lubo teraźniejsi autorowie wyprowadzają
je z kąta — Ta zmiana jest bardzo dobra w przy-
padku, kiedy Trygonometrya ma służyć do odkry-
cia prawd jeometrycznych, i kiedy pierwej musi
być do Jeometryi wprowadzona niż jest mowa
o kole. Jeżeli jednakże osobno pisze się Trygonome-
trya, i jeżeli się przypuszcza znajomość poprze-
dniczą Jeometryi, wtedy zmiana ta zdaje mi
się być niepotrzebną, tem więcej, że położenie linij
trygonometrycznych przy kole służy do łatwiejszego
uzmysłowienia ich wielkości i stanu dodatniego
lub ujemnego i nadto znajomość własności koła,
przyczynia się do ułożenia równań bardzo korzy-
stnych pomiędzy własnościami linij trygonometrycznych.

W ogólności Trygonometrya ta dzieli się na pięć części;
w pierwszej są wyłożone wzory trygonometryczne w ma-
tematyce liczne zastosowanie mające; w drugiej
sposób wynalezienia ustawy jednej sekundy a z tej

wszystkich linij trygonometrycznych począwszy od łuku zero
do 45go. W szukaniu wstawy jednej sekundy, użyłem najprost„
szego sposobu, wynajdując stosunek podwójnego łuku do promie„
nia i z tego wyprowadzając wstawę jednej sekundy - wszakże
i ten sposób jest dokładny, skoro okazuje się daje, że zmia„
na w wstawie jednej sekundy zachodzić dopiero może w 16tej
cyfrze dziesiętnej. Użyłem go zaś z tego powodu, aby Trygo„
nometrya ta mogła być zrozumiana od tych, co na wykła„
dzie elementarnym przestają i trzecią części dla mniejszych
wiadomości w algebrze opuścić sobie życzą lub muszą.
W tej samej części opisałem sposób obchodzenia się z ta„
blicami trygonometrycznemi, jakoteż podałem sposób
zamiany łuku w sekundach wyrażonego na łuk w częściach
promienia wyrażony i przeciwnie.
W trzeciej części wyłożyłem wzór Moivrea i szeregi trygo„
nometryczne używane po rozmaitych częściach Matematyki,
starając się o to, aby wszystkie umieszczone były. W dowo„
dach na wyrażenie sin a, cos a przez łuk i łuku przez
styczną zatrzymałem myśl byłego Professora Uniwersytetu
Jagiellońskiego Dra Hube. W czwartej części umieszczone
są wzory do rozwiązywania trójkątów prostokreślnych;
pomiędzy temi wyprowadziłem dwa wzory odpowiadające
wzorom Gaussa w Trygonometryi Kulistej, których z korzyścią
użyć można do wynalezienia boku w trójkącie, skoro
dwa inne są wiadome i wszystkie kąty - następnie wy„
łożone są sposoby rozwiązywania trójkątów ogólne
i szczególne przez szeregi. W piątej części wyłożona

jest w całej obszerności Trygonometrya Kulista. —
Ominąłem wszelkie zastosowania, przytaczając tylko kilka przykładów, aby ułatwić i uzmysłowić rachunki liczebne. — Trygonometrya albowiem wszędzie może być stosowaną, wielka zaś zadań z Geodezyi, Mechaniki, lub Astronomii, jako nie służą do zrozumienia Trygonometryi, lecz żadnej z tych nauk poznać nie dając. Każdy zaś znający gruntownie to, co Trygonometrya zawierać powinna, z największą łatwością pojmie owe nauki, ~~gp~~ skoro się im poświęcenia ~~p~~dogodną znajdzie sposobność. —

Skończyłem w Krakowie dnia 28 Grudnia 1843 r.

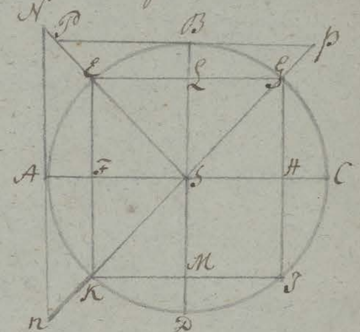
Autor.

Sprostowanie

Wszędzie gdzie we wzorach znajduje się wα$\sqrt{-1}$ pisać należy $\sqrt{-1}$ cosα. —

I

fig 1.



1. Poprowadziwszy w kole dwie średnice, jedną poziomą, drugą pionową, i obrawszy punkt A, gdzie średnica pozioma z lewej strony średnicy pionowej przecina okrąg koła, za początek (l'origine) i następnie wznosząc się nad średnicę poziomą ku punktom B. C, a potem zniżając ku punktom D, A. otrzymamy łuki, które co do wielkości swojej liczebnej, zamykać będą wszelkie wartości od zero aż do 360° a nawet i nad 360°, jeżeli jeszcze przejdziemy za punkt A. Tako rachowane łuki biorą się ze znakiem więcej (+); czyli uważają się za dodatne; rachowane albowiem w przeciwnym kierunku, to jest: od punktu A jako początku ku punktom D. C. B. A, według ogólnych zasad Algebry, uważają się za ujemne i biorą się ze znakiem mniej (−). Co się tycze dwóch średnic AC, BD, tych początek uważamy w punkcie S, gdzie się obiedwie przecinają; wielkości zaś brane od punktu S na nich

mogą być dodatne lub ujemne według kierunku, w którym się uważają. Zwykle wielkości brane od S ku punktom A i B są dodatne, a więc brane od S ku punktom C i D są ujemne. I tak FS i LS wyrażają się ze znakami dodatnemi, gdy znowu SH i SM z ujemnemi. —

2. Łuk stanowiący z drugim łukiem ćwiartkę koła czyli 90° nazywa się jego dopełnieniem (complément), stanowiący zaś 180° czyli połokręgu koła, nazywa się jego spełnieniem (supplément); Jeżeli we ogólności nazwiemy jakikolwiek łuk przez a, dopełnienie tego łuku wyrazi się przez $(90°-a)$ lub $(\frac{1}{2}\pi-a)$ a spełnienie przez $(180°-a)$ lub $(\pi-a)$, gdzie π znaczy stosunek połokręgu koła do promienia. Tak więc dopełnieniem łuku AE jest łuk EB, spełnieniem znowu łuku AG jest łuk GC. —

3. Uważajmy teraz łuk np. AE i nazwijmy go przez a, dopełnienie tego łuku EB wyrazi się przez $(90°-a)$. Spuśćmy prostopadłą EF na promień AS i poprowadźmy inną AN do przecięcia się z promie-

niem NS, otrzymamy linije EF. FS. AN. SN należące do tego łuku, którym nadano następujące nazwy. —

4. Linije EF nazwano wstawą (Sinus) łuku AE, więc wstawa jestto prostopadła spuszczona z jednego końca łuku, na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku i gdy łuk AE jest miarą kąta ASE, więc wstawa EF jest zarazem wstawą kąta ASE i wyraża się przez wsta lub Sina, gdzie a oznacza jakikolwiek łuk. — Wstawą więc łuku EB jest EL, wstawą łuku AG jest GH, wstawą łuku ABGI jest IH itd. —

5. Linije FS nazwano dostawą (Cosinus) łuku AE, więc dostawa jestto część promienia zawarta pomiędzy środkiem koła a spodkiem wstawy. jest ona zarazem dostawą kąta ASE mierzonego łukiem AE, wyraża się zaś przez dosa lub Cosa, gdzie a oznacza łuk jakikolwiek; jeżeli a oznacza łuk EB, wtedy dostawą jego jest SL, jeżeli oznacza łuk ABG dostawą jego jest SH, jeżeli oznacza łuk ABGI, dostawą jego jest także SH itd.

6. Zastanawiając się nad dwoma łukami AE i EB widzimy, iż EF to jest wstawa łuku AE jest równa SL dostawie łuku EB czyli (90°-a), gdy znowu FS dostawa łuku AE=a równa się EL wstawie łuku EB = (90°-a), więc w ogólności, wstawa

łuku, równa się dostawie łuku dopełnienia a dostawa równa się wstawie łuku dopełnienia, mamy więc

1) wsta = dos(90° − a)

2) dosa = wst(90° − a)

7. Linię AN nazwano styczną (tangens) łuku AE, więc styczna jestto prostopadła wyprowadzona do promienia przez jeden koniec łuku przechodzącego i przedłużona do zejścia się z promieniem przechodzącym przez drugi koniec tegoż łuku; jest ona także styczną kąta ASE mierzonego łukiem AE i wyraża się stya lub tanga albo tga, gdzie a oznacza jakikolwiek łuk, i jeżeli a oznacza łuk EB wtedy styczną jego jest linia CB, jeżeli a = ABG wtedy styczna tego łuku jest An itd. —

8. Linię znowu SN nazywają sieczną (Secans) łuku AE, więc sieczna jestto promień przedłużony do zejścia się ze styczną; jest ona zarazem sieczną kąta ASN i wyraża się zwykle sieа lub Seca gdzie a oznacza łuk lub kąt jakikolwiek i jeżeli a = EB wtedy sieczna jest SC, jeżeli a = ABG wtedy sieczna tego łuku jest Sn itd. —

9. Styczna BK łuku dopełnienia EB nazywa się także dotyczną (cotangens) łuku AE, także sieczna SK łuku dopełnienia BE nazywa się dosieczną (cosecans) łuku AE i przeciwnie AN jest dotyczną dla łuku BE, także jako SN jest dosieczną dla łuku BE, mamy więc

3) sty a = dot(90° − a)

4) dot a = sty(90° − a)

5) sie a = dosi(90° − a)

6) dosi a = sie(90° − a).

10. Jeszcze linja AF nazywa się wstawą odwrotną (sinus versus) a linja BL dostawą odwrotną (cosinus versus) łuku AE, czyli a i nazwawszy promień przez R mamy

7) wst. odw a = R − dos a

8) dost odw a = R − wst a.

11. W trójkącie więc prostokątnym FSE przy F, wziąwszy przeciwprostokątną za promień i z wierzchołka kąta S nakreśliwszy łuk EA, bok przeciwny temu kątowi to jest EF wyrazi jego wstawę a bok przyległy FS wyraża dostawę; wziąwszy zaś bok przyległy w trójkącie prostokątnym ASN za promień jako AS, to bok przeciwny AN kątowi S

wyraża styczną a przeciwprostokątna sieczną.

12. Wszystkie linje, któreśmy dotąd opisali nazywają się jeszcze w ogólności trygonometrycznemi, a część matematyki wyłuszczająca związki pomiędzy temiż linjami jakoteż pomiędzy niemi a łukami, nazywa się Trygonometrya. Trygonometrya nietylko jest umiejętnością posiłkującą Geometryi analitycznej, Rachunkowi wyższemu, Mechanice i Astronomii ale także, gdy na jej zasadach za pomocą rachunku, dają się wynaleźć trzy rzeczy trójkąta, skoro trzy inne są dane, służy do rozwiązywania trójkątów tak prostokreślnych jako i kulistych, i jest podstawą Geodezyi. Według dwoistego swojego ostatniego zastosowania dzielą ją się wszystko na prostokreślną i kulistą. —

13. Uważajmy teraz dwa łuki fig. 1. AE i AK sobie równe, z których pierwszy jest dodatny drugi ujemny (§1). Nazwawszy pierwszy

przez a drugi wyraża się przez −a, wstawę łuku AK to jest wst −a jest linja FK równa EF, lecz FK jest ujemne (§1), przeto mamy wst −a = − FK, albo wst −a = − EF (α), uważając teraz samę linję EF widzimy, iż ona jest wstawą łuku AE = a to jest że EF = wst a; tę więc wartość podstawiwszy w równanie (α) za EF otrzymujemy

7) wst −a = − wst a

Co się dotycze dostawy łuków AE = a i AK = −a wi= dzimy, iż linja FS jest dostawą tako dla pierwszego jako i dla drugiego łuku, więc jest

8) dost −a = dost a

to jest: że wstawa łuku ujemnego, równa się ujemnej wstawie łuku dodatnego, a dostawa łuku ujemnego równa się dodatnej dostawie łuku dodatnego

Nazwawszy łuk EK fig 1 przez a, wyraża się wtedy łuk AE jako połowa łuku EK przez ½a, wstawa łuku AE = ½a to jest linja EF, jest połową cięciwy EK łuku EK = a; więc nazwawszy dla krótkości cięciwę przez h mamy

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}h \text{ łuku } a$$

to jest, że wstawa łuku równa się połowie cięciwy łuku dwarazy większego

14. W trójkącie EFS fig. 1. kwadrat z przeciwprostokątnej ES równy jest summie kwadratów z ramion kąta prostego, to jest się $EF^2 + FS^2 = ES^2$; albo podstawiwszy stosowne wartości jest, $\sin^2 a + \cos^2 a = R^2$; który promień nazwiemy przez R. Najczęściej jednakże we wzorach trygonometrycznych i prawie zawsze, zwykło się brać promień za jedność, czego i my ciągle trzymać się będziemy. Ostatni zatem wzór wyrazi się jeszcze

$$9)\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Przeniósłszy raz $\cos^2 a$ a drugi raz $\sin^2 a$ na drugą stronę wypada

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a \text{ i}$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

jeżeli zaś wyciągniemy pierwiastek kwadratowy po obudwóch stronach otrzymamy,

$$10)\ \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$11)\ \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}.$$

Uważajmy dwa trójkąty fig. 1. ANS i FES, w których kąty A i F są proste; kąt S wspólny, więc podobne, mamy $AN : AS = EF : FS$, zkąd $AN = \frac{AS \times EF}{FS}$, lecz gdy $AN = \operatorname{tg} a$ $AS = 1$, $EF = \sin a$ i $FS = \cos a$ więc

$$12.)\ \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Uważajmy dalej dwa trójkąty ELS i DBS które podobne, mamy $DB : BS = EL : LS$, zkąd $DB = \frac{AS \times EL}{LS}$ a gdy $DB = \operatorname{ctg} a$, $BS = 1$, $EL = FS = \cos a$, $LS = EF = \sin a$ więc

$$13.)\ \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

Uważajmy znowu dwa trójkąty ANS i FES podobne mamy $NS : AS = ES : FS$. zkąd $NS = \frac{AS \times ES}{FS}$.

lecz gdy NS = sieca, AS = R = 1, ES = R = 1. i FS = dosa, więc

$$14)\quad sieca = \frac{1}{dosa}$$

Uważajmy nakoniec dwa trójkąty, BDS i ELS podobne, w których jest DS : BS = ES : LS, więc $DS = \frac{BS \times ES}{LS}$, a gdy DS = dosia, BS = 1, ES = 1, LS = FS = wsta, więc

$$15)\quad dosia = \frac{1}{wsta}$$

Mnóżmy wzory 12 i 13. stronami odpowiadającemi przez siebie, wypada $stya.dota = \frac{wsta.dosa}{dosa.wsta}$, i wykreśliwszy na drugiej stronie podobne wyrazy otrzymujemy;

16) stya.dota = 1. z kąd znowu wyciągając raz wartość na styczną a drugi raz na dotyczną mamy;

$$17)\quad stya = \frac{1}{dota}$$

$$18)\quad dota = \frac{1}{stya}$$

15. We wzorach 17 i 18. mnożąc obiedwie strony np. przez m wypada $m\,stya = \frac{m}{dota}$ i $m\,dota = \frac{m}{stya}$, z kąd się pokazuje, że mnożyć jakąś ilość m przez styczną łuku, albo dzielić przez dotyczną łuku, znowu mnożyć przez dotyczną albo dzielić przez styczną, jest wszystko jedno.

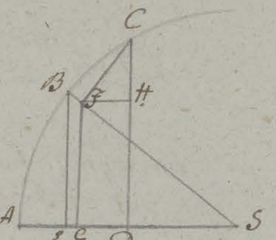
16. Porównawszy wzory 9 i 16 w których drugie strony są sobie równe, więc i pierwsze równe być muszą, otrzymujemy;

$$19)\quad wst^2a + dos^2a = stya.dota.$$

17. Niech będą dwa łuki AB i BC (fig 2), z których pierwszego wstawą jest BE, dostawą ES; drugiego wstawą CF dostawą FS. Nazwijmy łuk pierwszy przez a, drugi przez b i stan-

nijmy się

zajmijmy się wynaleźć wstawę CD łuku AE = a+b. Na ten koniec spuśćmy prostopadłe z punktu F na CD i AS to jest FH i FG. Linija CD = DH + CH, a że DH = FG, jako równoległe zawarte pomiędzy równoległemi, więc CD = GF + CH ..(α). Dwa trójkąty FGS i BES, w których kąty przy E i G są proste, a kąt S wspólny, są podobne i jest GF : FS = BE : BS, zkąd GF = $\frac{FS \times BE}{BS}$, lecz BE = wst a, FS = dost b i BS = 1; a zatem GF = wst a . dost b ..(β). Dalej znowu dwa trójkąty BES i CFH, z których boki jednego są prostopadłe do boków drugiego trójkąta, są podobne, a z tego podobieństwa wypada, iż boki są proporcyonalne; więc mamy CH : CF = ES : BS, zkąd CH = $\frac{CF \times ES}{BS}$, lecz CF = wst b ES = dost a i BS = 1; przeto CH = wst b dost a ..(γ). — Te wartości na GF i CH ze zrównań (β) i (γ) podstawiwszy w równanie (α), mamy CD = wst a dost b + wst b dost a a że CD = wst AE = wst(a+b); więc ostatecznie



20) wst(a+b) = wst a dost b + wst b dost a.

18. W ostatnim wzorze zamiast łuku dodatniego b weźmy łuk ujemny b, wypadnie

wst(a−b) = wst a dost −b + wst −b . dost a,

lecz na mocy wzoru 8) dost −b = dost b a na mocy wzoru 7) wst −b = − wst b, więc jest.

21) wst(a−b) = wst a dost b − wst b dost a.

Weźmy teraz w ostatnim wzorze zamiast łuku a jego dopeł„ nienie $90^\circ - a$, otrzymamy $\mathrm{wst}(90^\circ - a - b) = \mathrm{wst}(90^\circ - a)\,\mathrm{dos}\,b - \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{dos}(90^\circ - a)$; gdy zaś $90^\circ - a - b = 90^\circ - (a+b)$, bo po wykonaniu odejmowania wraca strona pierwsza i gdy namocy wzoru 2) $\mathrm{wst}(90^\circ - a) = \mathrm{dos}\,a$ a namocy wzoru 1) $\mathrm{dos}(90^\circ - a) = \mathrm{wst}\,a$, więc jeszcze mamy

$$\mathrm{wst}\{90^\circ - (a+b)\} = \mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b - \mathrm{wst}\,a.\mathrm{wst}\,b$$ nadto gdy $\mathrm{wst}\{90 - (a+b)\} = \mathrm{dos}(a+b)$ przeto,

$$22)\quad \mathrm{dos}(a+b) = \mathrm{dos}\,a.\mathrm{dos}\,b - \mathrm{wst}\,a.\mathrm{wst}\,b$$

Nakoniec w dopiero otrzymanym wzorze za b weźmy łuk $-b$ otrzymamy, $\mathrm{dos}(a-b) = \mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}{-b} - \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}{-b}$, gdy zaś we„ dług wzorów 7 i 8. $\mathrm{wst}{-b} = -\mathrm{wst}\,b$ i $\mathrm{dos}{-b} = \mathrm{dos}\,b$, więc

$\mathrm{dos}(a-b) = \mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b - \mathrm{wst}\,a \times -\mathrm{wst}\,b$, albo ostatecznie

$$23)\quad \mathrm{dos}(a-b) = \mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,b + \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,b.$$

19. We wzorze 20) połóżmy $b = a$ otrzymamy

$\mathrm{wst}(a+a) = \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,a + \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,a$ czyli

$$24)\quad \mathrm{wst}\,2a = 2\,\mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,a$$ ~~lub~~ lub

$$\mathrm{wst}\,a = 2\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}a;$$

położywszy zaś we wzorze 22) $b = a$ otrzymamy

$\mathrm{dos}(a+a) = \mathrm{dos}\,a\,\mathrm{dos}\,a - \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,a$ albo

$$25.\ \begin{cases} \mathrm{dos}\,2a = \mathrm{dos}^2 a - \mathrm{wst}^2 a \text{ lub} \\ \mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}a \end{cases}$$

20. We wzorze 21) położywszy $b = a$ wypada $\mathrm{wst}(a-a) = \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,a - \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,a$

czyli $26)\ \mathrm{wst}\,0 = 0$

co i fig 1. pokazuje, albowiem wstawa łuku jest prostopadła

spuszczona z jednego końca łuku na promień, przez dru„
gi koniec przechodzący. a gdy obadwa końce łuku zero
są w punkcie A, więc wstawa łuku zero musi być zero.
We wzorze (znowu 23) położywszy $b=a$ wypada
$\text{dos}(a-a) = \text{dos}^2 a + \text{wst}^2 a$, albo pamiętając na wzór (9)

mamy 27) $\text{dos}\,0 = 1$.

Także i figura 1. toż samo pokazuje, dostawa albowiem
jest część promienia, zawarta pomiędzy środkiem koła
a spodkiem wstawy, gdy zaś spodek wstawy łuku zero przy„
pada w punkcie A, więc dost 0 jest AS czyli jedność.
Mając wstawę i dostawę łuku zero, łatwo teraz znaj„
dziemy styczną, dotyczną, sieczną, dosieczną tegoż łuku
zapomocą wzorów 12. 13. 14. 15. Także mamy

$$\text{sty}\,0 = \frac{\text{wst}\,0}{\text{dos}\,0} = \frac{0}{1} = 0\ ;\quad \text{sie}\,0 = \frac{1}{\text{dos}\,0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{doty}\,0 = \frac{\text{dos}\,0}{\text{wst}\,0} = \frac{1}{0} = \infty\ ;\quad \text{dosie}\,0 = \frac{1}{\text{wst}\,0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Łatwo także z figury przekonać się można, że doty„
czna i dosieczna są ilości nieskończenie wielkie; albo„
wiem dopełnieniem łuku zero jest łuk AB = 90° styczna
jego jest BK, ale powinna być przedłużona aż do
zejścia się z promieniem AS, przez oddzielnym przez
drugi koniec łuku, wyrażającym wtedy jego sieczną,
gdy zaś dwie linie BK i AS jako prostopadłe do trze„
ciej BS, są od siebie równoległe i nigdy się nie scho„
dzą, więc są nieskończenie wielkie. —

21. Uważajmy łuk AE fig 1. za równy trzeciej części ćwiart„
ki czyli za równy 30°, ponieważ mamy $\text{wst}\,2a = 2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,a$ (24)

więc wiedząc że $\text{dos}\,a = \text{wst}(90° - a)$, co jest wszystko jedno, otrzymamy $\text{wst}\,2a = 2\,\text{wst}\,a\,\text{wst}(90° - a)$, a zastosowawszy ten wzór do łuku 30° wypada: $\text{wst}\,2.30° = 2\,\text{wst}\,30°.\,\text{wst}(90° - 30°)$ czyli $\text{wst}\,60° = 2\,\text{wst}\,30°\,\text{wst}\,60°$. Podzieliwszy obydwie strony przez $\text{wst}\,60°$ otrzymujemy: $\frac{\text{wst}\,60°}{\text{wst}\,60°} = 2\,\text{wst}\,30°$ czyli $2\,\text{wst}\,30° = 1$, a zatem

28) $\text{wst}\,30° = \frac{1}{2}$.

Co i figura pokazuje; albowiem według §13, wstawa EF łuku AE = 30° jest połową cięciwy łuku dwa razy większego czyli łuku EK = 60°; gdy zaś cięciwa łuku 60° równa się jedności, więc wstawa 30° równa jest połowie tej jedności.

22. We wzorze $\text{wst}(90° - a) = \text{dos}\,a$ połóżmy $a = 45°$ otrzymamy $\text{wst}(90° - 45) = \text{dos}\,45°$, czyli $\text{wst}\,45° = \text{dos}\,45°$, to jest że wstawa łuku 45° równa jest dostawie tegoż łuku; jakoż z figury też samo widzimy, jeżeli albowiem łuk AE równy będzie 45°, wtedy w trójkącie EFS prostokątnym, kąty S i E równe są 90°; gdy jeden z nich wynosi 45°, więc i drugi tyleż stopni mieć musi, a tem samem obadwa są sobie równe, a że naprzeciw kątów równych leżą boki równe, przeto EF = FS, czyli wstawa równa dostawie. —

Zastosowawszy wzór $\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = 1$ do łuku 45°, mamy $\text{wst}^2 45° + \text{dos}^2 45° = 1$, i gdy $\text{wst}\,45° = \text{dos}\,45°$, więc jeszcze $\text{wst}^2 45° + \text{wst}^2 45° = 1$, albo $2\,\text{wst}^2 45° = 1$, zkąd znowu $\text{wst}^2 45° = \frac{1}{2}$, albo po wyciągnieniu pierwiastka kwadratowego,

30) $\text{wst}\,45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.
$\text{dos}\,45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

Styczna łuku 45° otrzymuje się ze wzoru $\text{sty}\,a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}$,

będzie więc $stg\,45^\circ = \frac{wst\,45^\circ}{dos\,45^\circ} = \frac{wst\,45^\circ}{wst\,45^\circ} = 1.$; co i figura pokazuje; albowiem w trójkącie prostokątnym ANS, kąt przy S równy jest 45° więc i kąt N = 45° a tem samem AN = stg 45° = AS = R = 1. Jest więc w ogólności

31) $stg\,45^\circ = 1.$

23. Jeżeli łuk który uważamy wynosi 90°, tedy we wzorach $wst\,a = dos(90-a)$ i $dos\,a = wst(90^\circ-a)$, położywszy 90° za a, wypada, $wst\,90^\circ = dos(90^\circ-90^\circ) = dos\,0 = 1$ (27) i $dos\,90 = wst(90^\circ-90^\circ) = wst\,0 = 0$ (26), co znowu i figura pokazuje; albowiem wstawa łuku AB = 90° jest BS = R = 1. a dostawa, część promienia zawarta pomiędzy środkiem koła i środkiem wstawy, a że wstawa pada we środek koła, więc dostawa jest zero. Mamy przeto

32) $wst\,90^\circ = 1.$

33) $dos\,90^\circ = 0.$

Inne linije trygonometryczne tego łuku, otrzymują się ze znanych wzorów na styczną, dotyczną, sieczną, dosieczną i jest.

$stg\,90^\circ = \frac{wst\,90^\circ}{dos\,90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$, $sie\,90^\circ = \frac{1}{dos\,90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$

$dot\,90^\circ = \frac{dos\,90^\circ}{wst\,90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$, $dosi\,90^\circ = \frac{1}{wst\,90^\circ} = \frac{1}{1} = 1.$

24. We wzorach $wst(90^\circ-a) = dos\,a$ i $dos(90^\circ-a) = wst\,a$ położymy tutaj $-a$ za $+a$, a tem samem $+a$ za $-a$, otrzymamy $wst(90+a) = dos-a = dos\,a$ (8) i $dos(90^\circ+a) = wst-a = -wst\,a$ (7), albo inaczej jest

$$wst(90°+a) = dos\,a$$
$$dos(90°+a) = -\,wst\,a!,$$

jeżeli teraz w dopiero otrzymanych wzorach położymy łuk dopełnienia 90°−a zamiast łuku a, wypadnie

$wst(90°+90°-a) = dos(90°-a)$ i $dos(90+90-a) = -\,wst(90°-a)$, czyli

$$34)\quad wst(180°-a) = wst\,a$$
$$35)\quad dos(180°-a) = -\,dos\,a.$$

Toż samo i figura pokazuje, nazwawszy albowiem łuk fig. CG przez a, łuk ABG wyrazi się przez 180°−a, widzimy zaś, iż wstawa łuku ABG = 180°−a jako też łuku GC = a jest taż sama linia GH; gdy znowu dostawa łuku 180°−a i a jest linia SH, która jako brana od początku S w kierunku przeciwnym kierunkowi od S ku A jest ujemna (81).

Gdy zaś łuk ABG jest miarą kąta ASG a łuk GC miarą kąta GSC, więc wstawa kąta rozwartego, równa się wstawie kąta spełnienia, a dostawa kąta rozwartego równa się ujemnej dostawie kąta spełnienia.

25. Co się tycze innych linij trygonometrycznych tego łuku, otrzymuje się one bardzo łatwo ze wzorów na styczne, dotyczne itd. I tak

$$sty(180°-a) = \frac{wst(180°-a)}{dos(180°-a)} = \frac{wst\,a}{-\,dos\,a} = -\,sty\,a.$$
$$dot(180°-a) = \frac{dos(180°-a)}{wst(180°-a)} = \frac{-\,dos\,a}{wst\,a} = -\,dot\,a.$$
$$sie(180°-a) = \frac{1}{dos(180°-a)} = \frac{1}{-\,dos\,a} = -\,sie\,a.$$
$$dosie(180°-a) = \frac{1}{wst(180°-a)} = \frac{1}{wst\,a} = dosie\,a.$$

26. Połóżmy teraz we wzorach $wst(180°-a) = wst\,a$ i $dos(180°-a) = -dos\,a$ łuk $a=0$, otrzymamy $wst\,180° = wst\,0 = 0$ i $dos\,180° = -dos\,0 = -1$.; czyli

$$36)\quad wst\,180° = wst\,\pi = 0$$

$$37)\quad dos\,180° = dos\,\pi = -1.$$

co i figura pokazuje; albowiem dostawa łuku ABC jest promień SC ujemny a wstawa ABC musi być zero. Inne linie trygonometryczne tego łuku otrzymują się; stądże we wzorach §25. łuk $a=0$, i mamy

$sty\,180° = sty\,\pi = 0$, $sie\,180° = sie\,\pi = -1.$

$dost\,180° = dost\,\pi = -\infty$, $dosi\,180° = dosi\,\pi = \infty$

27. We wzorach $wst(\pi-a) = wst\,a$ i $dos(\pi-a) = -dos\,a$, połóżmy łuk $-a$ zamiast $+a$, czyli znowu $+a$ za $-a$, otrzymamy $wst(\pi+a) = wst-a = -wst\,a$, i $dos(\pi+a) = -dos-a = -dos\,a$, czyli

$$38)\quad wst(\pi+a) = -wst\,a$$

$$39)\quad dos(\pi+a) = -dos\,a$$

co i figura pokazuje, jeżeli albowiem łuk $CD = a$, wtedy łuk $ABCD = \pi+a$, wstawa łuku $ABCD = \pi+a$ jako i $CD = a$ jest linia AD ujemna (§1), dostawa tychże łuków jest także linia AS ujemna. —

28. Położywszy dalej we wzorach 38 i 39 łuk dopełnienia $90-a$ zamiast łuku a, otrzymujemy

$wst(180°+90°-a) = -wst(90°-a) = -dos\,a$ i

$dos(180°+90°-a) = -dos(90°-a) = -wst\,a$ czyli

$$40)\quad wst(270°-a) = -dos\,a$$

$$41)\quad dos(270°-a) = -wst\,a.$$

Jakoż nazwawszy łuk ID fig 1. przez a, będzie łuk $ABCI = 270^\circ - a$, wstawa łuku ABCI jest $AI = MS$ dostawie ujemnej łuku $ID = a$; dostawa zaś łuku $ABCI = 270^\circ - a$ jest $AH = MI$ wstawie ujemnej łuku $ID = a$. Inne linie trygonometryczne z łatwością dają się otrzymać z wiadomych wzorów.—

Położywszy dalej we wzorach 40 i 41 łuk $a = 0$ wypada $\text{wst}\,270^\circ = -\text{dos}\,0 = -1$ i $\text{dos}\,270^\circ = -\text{wst}\,0 = 0$; jakoż wstawa łuku $ABCD = 270^\circ$ jest $DS = R = -1$, a dostawa zero, więc

$$42)\quad \text{wst}\,270^\circ = \text{wst}\,3.\tfrac{\pi}{2} = -1.$$

$$43)\quad \text{dos}\,270^\circ = \text{dos}\,3.\tfrac{\pi}{2} = 0.$$

29. We wzorach 40 i 41. połóżmy najprzód $+a$ zamiast $-a$, a zatem i $-a$ za $+a$, będzie $\text{wst}(270^\circ + a) = -\text{dos}\,{-a} = -\text{dos}\,a$ (8) i $\text{dos}(270 + a) = -\text{wst}\,{-a} = -(-\text{wst}\,a) = \text{wst}\,a$; weźmy dalej w tych otrzymanych wzorach łuk dopełnienia $(90 - a)$ za a, otrzymujemy $\text{wst}(270 + 90 - a) = -\text{dos}(90^\circ - a) = -\text{wst}\,a$ i $\text{dos}(270 + 90 - a) = \text{wst}(90 - a) = \text{dos}\,a$

czyli
$$44)\quad \text{wst}(360^\circ - a) = \text{wst}(2\pi - a) = -\text{wst}\,a$$

$$45)\quad \text{dos}(360^\circ - a) = \text{dos}(2\pi - a) = \text{dos}\,a.$$

Toż samo i fig 1 pokazuje, albowiem jeżeli łuk $AK = a$, wtedy jest łuk $ABCDK = 360^\circ - a = 2\pi - a$, wstawa obudwóch tych łuków jest HK ujemna (§7), dostawa zaś jest KS dodatnia.—

30. Założywszy zaś w ostatnich wzorach $a = 0$, wypada zaraz $\text{wst}\,360^\circ = \text{wst}\,2\pi = 0$ i $\text{dos}\,2\pi = \text{dos}\,360^\circ = \text{dos}\,0 = 1$. To jest że wstawa i dostawa całego okręgu koła są takież same jako łuku zero.

31. Jeszcze we wzorach 44 i 45 weźmy łuk $+a$ za $-a$, a tem samem łuk $-a$ za $+a$, będzie $\text{wst}(2\pi + a) = -\text{wst}\,{-a} = -(-\text{wst}\,a) = \text{wst}\,a$. i $\text{dos}(2\pi + a) = \text{dos}\,{-a} = \text{dos}\,a$. Położywszy dalej $2\pi + a$ za

zamiast łuku a wypada.

$$wst(2\pi+2\pi+a) = wst(2\pi+a) = wsta \text{ i}$$

$$dost(2\pi+2\pi+a) = dost(2\pi+a) = dosta \text{ albo}$$

$wst(4\pi+a) = wsta$ i $dost(4\pi+a) = dosta$, toż samo otrzymuje się kładąc dalej jeszcze $2\pi+a$ za a i będzie

$wst(6\pi+a) = wsta$ i $dost(6\pi+a) = dosta$, w ogólności więc napisać możemy.

$$46)\ wst(2r\pi+a) = wsta$$

$$47)\ dost(2r\pi+a) = dosta$$

gdzie r oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą

W otrzymanych wzorach 46 i 47 połóżmy łuk $a-2r\pi$ zamiast łuku a wypada. $wst(2r\pi+a-2r\pi) = wst(a-2r\pi)$, $dost(2r\pi+a-2r\pi) = dost(a-2r\pi)$, a gdy na pierwszej stronie $+2r\pi$ i $-2r\pi$ znosi się, więc pisząc drugą stronę pierwszej mamy.

$$48)\ wst(a-2r\pi) = wsta$$

$$49)\ dost(a-2r\pi) = dosta.$$

W ogólności więc wzory 46 i 48, tudzież 47 i 49 dają się wyrazić pod następującą ogólną postacią

$$50)\ wst(a\pm2r\pi) = wsta$$

$$51)\ dost(a\pm2r\pi) = dosta$$

<u>to jest, że łuki różniące się o ilekolwiek okręgów koła mają też same wstawy i dostawy a zatem i inne linije trygonometryczne.</u>

32. Ze wzorów 26. 36. pokazuje się, że łuki 0 czyli $0.\frac{\pi}{2}$, π czyli $2.\frac{\pi}{2}$. Dalej 2π czyli $4.\frac{\pi}{2}$ (§ 30) mają za wstawę zero, takąż samą wstawę mają także łuki 3π czyli $6.\frac{\pi}{2}$ i 4π czyli $8\frac{\pi}{2}$ i w ogólności łuki $r.\frac{\pi}{2}$, byleby r było liczbą całkowitą i parzystą, możemy więc napisać

A) $wst\, r.\frac{\pi}{2} = 0$ kiedy r parzyste.

Też same łuki, o których teraz mówiliśmy, stosownie do wzorów 27. 37 i § 30 mają za dostawę kolejno raz +1 drugi raz −1, i w ogólności takie dostawy wypadają ze wzoru $dost\, r\frac{\pi}{2}$, kiedy r parzyste. Lecz, gdy r parzyste właśnie $(-1)^{\frac{r}{2}}$ daje naprzemian dla wartości $r = 0, 2, 4, 6$, itd raz +1, drugi raz −1, więc mamy

B) $dost\, r\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{r}{2}}$, kiedy r parzyste.

Nazwawszy zaś $\frac{r}{2} = s$, ostatnie dwa wzory mogą być jeszcze i w ten sposób napisane, gdzie s może przyjąć jakąkolwiek wartość całkowitą.

A') $wst\, s\pi = 0$

B') $dost\, s\pi = (-1)^s$.

Ze wzorów znowu 33. 43 poznajemy, że łuki $\frac{\pi}{2}$, 270 czyli $3.\frac{\pi}{2}$, a nawet dalsze, jako $5\frac{\pi}{2}$. $7\frac{\pi}{2}$. $9\frac{\pi}{2}$ itd mają za dostawę zero, tak dalece, że znowu napisać możemy.

C) $dost\, r\frac{\pi}{2} = 0$ gdy r nieparzyste.

Też same łuki stosownie do wzorów 32, 42, mają naprzemian raz za wstawę +1, drugi raz −1 i takie wstawy w ogólności wypadają ze wzoru $wst\, r\frac{\pi}{2}$ gdy r nieparzyste. Lecz gdy r nieparzyste właśnie $(-1)^{\frac{r-1}{2}}$ daje raz +1 drugi raz −1 dla wartości $r = 1, 3. 5$ itd więc jest.

D) $wst\, r\frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{r-1}{2}}$ kiedy r nieparzyste. —

33. Szukajmy teraz ogólnie $wst(r\frac{\pi}{2} - ra)$; według wzoru (21) mamy $wst(r\frac{\pi}{2} - ra) = wst\, r\frac{\pi}{2}\, dost\, ra - wst\, ra\, dost\, r\frac{\pi}{2}$, jeżeli r jest pa-

rzyste, wtedy stosownie do wzorów (A) i (B) mamy $\sin(r\frac{\pi}{2}-ra) = -(-1)^{\frac{r}{2}}\sin ra$
a gdy $-(-1)^{\frac{r}{2}} = (-1)^{\frac{r}{2}+1}$ więc

$$E)\ \sin(r\tfrac{\pi}{2}-ra) = (-1)^{\frac{r}{2}+1}\sin ra,\ \text{gdy } r \text{ parzyste}$$

Jeżeli znowu r jest nieparzyste, wtedy stosownie do wzorów (D) i (C)
wypada

$$F)\ \sin(r\tfrac{\pi}{2}-ra) = (-1)^{\frac{r+1}{2}}\cos ra \ .\ .\ r \text{ nieparzyste.}$$

Szukajmy dalej wyrażenia ogólnego $\cos(r\frac{\pi}{2}-ra)$; według wzoru (23), jest $\cos(r\frac{\pi}{2}-ra) = \cos r\frac{\pi}{2}\cos ra + \sin r\frac{\pi}{2}\cos ra$ i kiedy r parzyste, wtedy według (B) i (A) mamy

$$G)\ \cos(r\tfrac{\pi}{2}-ra) = (-1)^{\frac{r}{2}}\cos ra \ .\ r \text{ parzyste}$$

Jeżeli zaś r nieparzyste, stosownie do wzorów (C) i (D) wypada

$$H)\ \cos(r\tfrac{\pi}{2}-ra) = (-1)^{\frac{r-1}{2}}\sin ra \ .\ .\ r \text{ nieparzyste.}$$

Szukajmy jeszcze wyrażenia $\sin(a\pm s\pi)$; według wzorów 20 i 21 mamy $\sin(a\pm s\pi) = \sin a\cos s\pi \pm \sin s\pi\cos a$, stosownie zaś do wzorów (B') i (A') mamy

$$K)\ \sin(a\pm s\pi) = (-1)^s\sin a$$

Szukając zaś wartości $\cos(a\pm s\pi)$, stosownie do wzorów 22 i 23 mamy $\cos(a\pm s\pi) = \cos a\cos s\pi \mp \sin a\sin s\pi$ a według wzorów (B') i (A') mamy,

$$L)\ \cos(a\pm s\pi) = (-1)^s\cos a.$$

Wreszcie ostatnie dwa wzory dają dla jakiejkolwiek całkowitej liczby s ~~całkowitej~~

$$\sin(a+s\pi) = \sin(a-s\pi)$$
$$\cos(a+s\pi) = \cos(a-s\pi).$$

34. Zastanowiwszy się nad wzorami $\sin 0 = 0$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin 90° = 1$; tudzież $\cos 0 = 1$, $\cos 30° = \sqrt{1-\sin^2 30°} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 90° = 0$ widzimy, iż począwszy od łuku zero, sinus łuków coraz większych staje się coraz większy, gdy znowu cosinus wypada coraz mniejszy; wreszcie sinus 90°, jest najwiękrzy i równa jedności, cosinus zaś 90°

najmniejsza i równa zero; następnych albowiem łuków większych od 90° wstawa się zmniejsza a dostawa powiększa lubo ujemnie. Bo ze wzorów 34 i 35 jeżeli weźmiemy np. $a = 45°$ wypada

$wst(180° - 45°) = wst\,135° = wst\,45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $dost(180° - 45°) = dost\,135° = -dost\,45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, wziąwszy zaś $a = 30°$ wypada, $wst\,150° = \tfrac{1}{2}$, $dost\,150° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ i nakoniec mamy $wst\,180° = 0$, $dost\,180° = -1$.

Dalsze łuki większe od 180° mają znowu wstawy coraz większe ujemne a dostawy coraz mniejsze także ujemne; albowiem wzory 40 i 41, biorąc $a = 45°$ a potem $a = 30°$ dają, $wst\,225° = -dost\,45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $wst\,240° = -dost\,30° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, wreszcie $wst\,270° = -1$; gdy znowu $dost\,225° = -wst\,45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $dost\,240° = -wst\,30° = -\tfrac{1}{2}$, i nakoniec $dost\,270° = 0$.—

Łuki wreszcie większe od 270° mają coraz mniejsze wstawy ujemne a coraz większe dostawy dodatnie, bo we wzorach 44 i 45 biorąc łuk $a = 45°$ a potem 30° otrzymujemy.

$wst\,315° = -wst\,45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $dost\,315° = dost\,45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$,

$wst\,330° = -wst\,30° = -\tfrac{1}{2}$, $dost\,330° = dost\,30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

$wst\,360° = 0$, $dost\,360° = 1$.

Gdy zaś według (§31) linije trygonometryczne łuków różniących się o ilekolwiek okręgów kół są też same; więc też wstawy i dostawy dalszych łuków większych od 360° podobnym i dopiero opisanym ulegają zmianom.—

35. Z tego wszystkiego pokazuje się, że wstawy łuków, zacząwszy od zero, za wzrostem łuku, powiększają się do ~~90~~ łuku 90°, potem zmniejszają się do łuku 180°, dalej znowu powiększają się lecz ujemnie do 270° nakoniec zmniejszają do 360°. Dostawy zaś zmniejszają się od łuku zero do 90°, potem powiększają się ujemnie dla łuków aż do 180°, znowu zmniejszają się dla łuków rosnących do 270° i nakoniec powiększają dodatnie dla łuków rosnących do 360°, poczem znowu zmniejszają się itd. Obadwie te linije dwarazy zyskują swoję największość raz dodatnią drugi raz ujemną i dwarazy przechodzą przez zero; po przejściu przez

zero zmieniają znaki; albo (albo też) raz dochodzą do najwięk-szości która wynosi +1 drugi raz do najmniejszości wynoszą-cej −1.

Uważając fig 1. można ustanowić to prawo wypływające z (81), iż granicą wstaw dodatnych jest średnica pozioma; wszyst-kie wstawy nad tą średnicą przypadające są dodatnie, wszyst-kie znowu pod średnicą poziomą są ujemne — Granicą do-staw dodatnych jest średnica pionowa, wszystkie dostawy z lewej strony są dodatne, gdy znowu z prawej są ujemne. —

36\. Co się tycze stycznych, te we wzroście swoim naśladują wstawy, gdy znowu dostyczne idą za dostawami; albowiem wzór $sty\,a = \frac{wsta}{dosa}$ pokazuje, że od 0 do 90° styczna ciągle rośnie; gdyż mianownik drugiej strony zmniejsza się a licznik powiększa; dla łuków zawartych pomiędzy 90° i 180° styczna zmniejsza się, bo licznik zmniejsza się gdy znowu mianownik powiększa; dalej dla łuków od 180° do 270 styczna rośnie, a dla łuków od 270 do 360 ma-leje; gdy znowu wzór na dostyczną $\frac{dosa}{wsta}$ wszystko przeciwnie przedstawia. W tej zmianie stycznej i dostycznej zachodzi dwa razy także największość, raz dodatnia drugi raz ujemna wynosząca ilość nieskończenie wielką i dwa razy najmniejszość ró-wną zero. Albo też każda z tych linij raz zysku-je największość równą +∞, drugi raz najmniej-szość równą −∞. Co się znowu tycze znaków tych linij, te według wzorów $\frac{wsta}{dosa}$, $\frac{dosa}{wsta}$ zatwoiną za-wsze dają się ocenić. I tak np. chcąc wiedzieć jaki ma znak $sty\,225°$ czyli łuku $270°-45°$ mamy

$sty(270°-45°) = \frac{wst(270°-45°)}{dos(270°-45°)} = \frac{-dos\,45°}{-wst\,45°}$ (40, 41) i gdy znaki są jednakowe w liczniku i mianowniku, więc ta styczna jest dodatnia, a co do wielkości liczebnej równa $dost\,45°$. —

37. We wzorach 20, 22, zamiast łuku b połóżmy łuk 2a otrzymamy
$\mathrm{wrt}(a+2a) = \mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}2a + \mathrm{wrt}2a\,\mathrm{dos}a$ i $\mathrm{dos}(a+2a) = \mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}2a - \mathrm{wrt}a\,\mathrm{wrt}2a$;
Dalej zamiast $\mathrm{wrt}2a$, $\mathrm{dos}2a$, połóżmy wartości ze wzorów (24) (25)
otrzymamy $\mathrm{wrt}3a = \mathrm{wrt}a(\mathrm{dos}^2a - \mathrm{wrt}^2a) + 2\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}a$ czyli
$\mathrm{wrt}3a = \mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a - \mathrm{wrt}^3a + 2\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a = 3\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a - \mathrm{wrt}^3a$
a biorąc jeszcze $\mathrm{dos}^2a = 1 - \mathrm{wrt}^2a$ (§14) mamy
$\mathrm{wrt}3a = 3\mathrm{wrt}a(1-\mathrm{wrt}^2a) - \mathrm{wrt}^3a = 3\mathrm{wrt}a - 3\mathrm{wrt}^3a - \mathrm{wrt}^3a$, czyli

52) $\mathrm{wrt}3a = 3\mathrm{wrt}a - 4\mathrm{wrt}^3a$

Dalej znowu co się tyczy dostawy mamy $\mathrm{dos}3a = \mathrm{dos}a(\mathrm{dos}^2a - \mathrm{wrt}^2a) -$
$\mathrm{wrt}a \cdot 2\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}^3a - \mathrm{dos}a\,\mathrm{wrt}^2a - 2\mathrm{wrt}^2a\,\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}^3a - 3\mathrm{wrt}^2a\,\mathrm{dos}a$.
albo podstawiwszy $1-\mathrm{dos}^2a$ za wrt^2a (§14) mamy
$\mathrm{dos}3a = \mathrm{dos}^3a - 3(1-\mathrm{dos}^2a)\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}^3a - 3\mathrm{dos}a + 3\mathrm{dos}^3a = 4\mathrm{dos}^3a - 3\mathrm{dos}a$, czyli

53) $\mathrm{dos}3a = 4\mathrm{dos}^3a - 3\mathrm{dos}a$.

38. Gdybyśmy chcieli wynaleźć wartości wrtawy i dostawy łuku 5a, wypada we wzorach 20 i 22 położyć $a=3a$ i $b=2a$, bo wtedy wypadnie $\mathrm{wrt}5a = \mathrm{wrt}3a\,\mathrm{dos}2a + \mathrm{dos}3a\,\mathrm{wrt}2a$ i
$\mathrm{dos}5a = \mathrm{dos}3a \cdot \mathrm{dos}2a - \mathrm{wrt}3a\,\mathrm{wrt}2a$, albo podstawiwszy wartości ze wzorów 24, 25, tudzież 52 i 53 mamy
$\mathrm{wrt}5a = (3\mathrm{wrt}a - 4\mathrm{wrt}^3a)(\mathrm{dos}^2a - \mathrm{wrt}^2a) + 2\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}a(4\mathrm{dos}^3a - 3\mathrm{dos}a) =$
$= 3\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a - 4\mathrm{wrt}^3a\,\mathrm{dos}^2a - 4\mathrm{wrt}^3a + 4\mathrm{wrt}^5a + 8\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^4a - 6\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a$
$= 4\mathrm{wrt}^5a - 4\mathrm{wrt}^3a - 4\mathrm{wrt}^3\mathrm{dos}^2a - 3\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^2a + 8\mathrm{wrt}a\,\mathrm{dos}^4a$
a że jeszcze $\mathrm{dos}^2a = 1 - \mathrm{wrt}^2a$ (§14) wypada
$\mathrm{wrt}5a = 4\mathrm{wrt}^5a - 4\mathrm{wrt}^3a - 4\mathrm{wrt}^3a(1-\mathrm{wrt}^2a) - 3\mathrm{wrt}a(1-\mathrm{wrt}^2a) + 8\mathrm{wrt}a(1-\mathrm{wrt}^2a)^2$
$= 4\mathrm{wrt}^5a - 4\mathrm{wrt}^3a - 4\mathrm{wrt}^3a + 4\mathrm{wrt}^5a - 3\mathrm{wrt}a + 3\mathrm{wrt}^4a + 8\mathrm{wrt}a - 16\mathrm{wrt}^3a + 8\mathrm{wrt}^4a$
albo upraszczając, otrzymujemy nareszcie

54) $\mathrm{wrt}5a = 5\mathrm{wrt}a - 20\mathrm{wrt}^3a + 16\mathrm{wrt}^5a$.

podobnym otrzymujemy sposobem

$$\text{Dos}\,5a = (4\,\text{dos}^3a - 3\,\text{dos}\,a)(\text{dos}^2a - \text{wrt}^2a) - 2\,\text{wrt}\,a\,\text{dos}\,a\,(3\,\text{wrt}\,a - 4\,\text{wrt}^3a)$$

$$= 4\,\text{dos}^5a - 3\,\text{dos}^3a - 4\,\text{wrt}^2a\,\text{dos}^3a + 3\,\text{wrt}^2a\,\text{dos}\,a - 6\,\text{wrt}^2a\,\text{dos}\,a + 8\,\text{wrt}^4a\,\text{dos}\,a$$

$$= 4\,\text{dos}^5a - 3\,\text{dos}^3a - 4(1-\text{dos}^2a)\,\text{dos}^3a - 3(1-\text{dos}^2a)\,\text{dos}\,a + 8(1-\text{dos}^2a)^2\,\text{dos}\,a$$

$$= 4\,\text{dos}^5a - 3\,\text{dos}^3a - 4\,\text{dos}^3a + 4\,\text{dos}^5a - 3\,\text{dos}\,a + 3\,\text{dos}^3a + 8\,\text{dos}\,a - 16\,\text{dos}^3a + 8\,\text{dos}^5a$$

czyli ostatecznie

$$55)\quad \text{dos}\,5a = 5\,\text{dos}\,a - 20\,\text{dos}^3a + 16\,\text{dos}^5a$$

39. Dodajmy do siebie stronami odpowiadającemi dwa wzory 9 i 25 †, otrzymamy $1+\text{dos}\,a = 2\,\text{dos}^2\tfrac{1}{2}a$, powtóre po odjęciu tychże samych wzorów wypada $1-\text{dos}\,a = 2\,\text{wrt}^2\tfrac{1}{2}a$, a zatem jest

$$56)\quad 1+\text{dos}\,a = 2\,\text{dos}^2\tfrac{1}{2}a$$

$$57)\quad 1-\text{dos}\,a = 2\,\text{wrt}^2\tfrac{1}{2}a$$

40. Z tych wzorów łatwo jest teraz otrzymać wartości wstawy i dostawy połowy łuku, jakoż działając obadwa równania przez 2 i wyciągając pierwiastek kwadratowy wypada

$$58)\quad \text{dos}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\text{dos}\,a}{2}}$$

$$59)\quad \text{wrt}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\text{dos}\,a}{2}}$$

41. Dodając i odejmując wzory 20 i 21, tudzież 22 i 23) mieć będziemy

$$\left.\begin{aligned} \text{wrt}(a+b) + \text{wrt}(a-b) &= 2\,\text{wrt}\,a\,\text{dos}\,b \\ \text{wrt}(a+b) - \text{wrt}(a-b) &= 2\,\text{wrt}\,b\,\text{dos}\,a \\ \text{Dos}(a+b) + \text{dos}(a-b) &= 2\,\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b \\ \text{Dos}(a-b) - \text{dos}(a+b) &= 2\,\text{wrt}\,a\,\text{wrt}\,b \end{aligned}\right\}\ \text{Ft.}$$

---

† wzór 9 nim dodany zostanie lub odjęty ze wzorem 25, ponieważ służy dla każdego i jakiegolwiek łuku więc i $\tfrac{1}{2}a$, powinien być napisany pod postacią

$$1 = \text{dos}^2\tfrac{1}{2}a + \text{wrt}^2\tfrac{1}{2}a.$$

42. W pierwszym i trzecim wzorze (§ 41) szukajmy wartości na $\text{wst}(a+b)$ i $\text{dost}(a+b)$ otrzymamy.

$$\text{wst}(a+b) = 2\,\text{wst}\,a\,\text{dost}\,b - \text{wst}(a-b)$$

$$\text{dost}(a+b) = 2\,\text{dost}\,a\,\text{dost}\,b - \text{dost}(a-b)$$

połóżmy teraz $a=(n+1)b$ będzie

60) $\text{wst}(n+2)b = \text{wst}(n+1)b \times 2\,\text{dost}\,b + \text{wst}\,nb \times -1.$

61) $\text{dost}(n+2)b = \text{dost}(n+1)b \times 2\,\text{dost}\,b + \text{dost}\,nb \times -1.$

Z tych wzorów łatwo daje się widzieć, że dla otrzymania wstaw„ wy jakiejkolwiek wielokrotności łuku $(n+2)b$; potrzeba wstawy wielokrotności bezpośrednio niższych $(n+1)b$ i nb pomnożyć odpowiednio przez stałe wielkości $2\,\text{dost}\,b$ i mniej jeden a następnie iloczyny dodać do siebie, według prawidła znaków. Toż samo prawo stosuje się dla dostaw, byleby dostawy wielokrotności bezpośrednio niższych mnożone były przez wspomnione stałe wielkości.

Połóżmy w powyższych wzorach $b=1''$ a n równe porządkiem 0. 1. 2. 3. itd otrzymujemy

G'

$$\text{wst}\,2'' = 2\,\text{wst}\,1''\,\text{dost}\,1'' \qquad \text{dost}\,2'' = 2\,\text{dost}^2 1'' - 1.$$

$$\text{wst}\,3'' = \text{wst}\,2'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{wst}\,1'' \times -1. \qquad \text{dost}\,3'' = \text{dost}\,2'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{dost}\,1'' \times -1.$$

$$\text{wst}\,4'' = \text{wst}\,3'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{wst}\,2'' \times -1. \qquad \text{dost}\,4'' = \text{dost}\,3'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{dost}\,2'' \times -1.$$

$$\text{wst}\,5'' = \text{wst}\,4'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{wst}\,3'' \times -1. \qquad \text{dost}\,5'' = \text{dost}\,4'' \times 2\,\text{dost}\,1'' + \text{dost}\,3'' \times -1.$$

wreszcie następstwo wstaw i dostaw tworzy szeregi zwrotne; których stopniem skazówka (l'echelle de relation) składa się z dwóch ilości $2\,\text{dost}\,1''$ i -1.

43. Połóżmy teraz we wzorach pierwszym i ostatnim (F) łuk $a=30°$ otrzymujemy $\text{wst}(30°+b) + \text{wst}(30-b) = 2\,\text{wst}\,30°\,\text{dost}\,b$

i . $dos(30^\circ - b) - dos(30^\circ + b) = 2 wst 30^\circ wst b$, a gdy $2 wst 30^\circ = 1$ (28) więc porządkując wypada

$$62)\ wst(30^\circ + b) = dos\, b - wst(30^\circ - b)$$

$$63)\ dos(30^\circ + b) = dos(30^\circ - b) - wst\, b.$$

44. We wzorach (F) nazwijmy $a+b = A$, $a-b = B$; dodawszy obadwa równania i odjąwszy wypada, $2a = A+B$ i $2b = A-B$, zkąd $a = \frac{1}{2}(A+B)$ i $b = \frac{1}{2}(A-B)$, takie wartości podstawiwszy we wspomnione wzory, otrzymujemy. —

$$64)\ wst A + wst B = 2 wst \tfrac{1}{2}(A+B) dos \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$65)\ wst A - wst B = 2 wst \tfrac{1}{2}(A-B)\ dos \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$66).\ dos A + dos B = 2 dos \tfrac{1}{2}(A+B)\ dos \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$67)\ dos B - dos A = 2 wst \tfrac{1}{2}(A+B) wst \tfrac{1}{2}(A-B)$$

<u>Uwaga</u> W ostatnim wzorze dla zamiany różnicy do.. staw na iloczyn, jeżeli się od dos B odejmuje dos A, należy dla otrzymania wstawy połowy różnicy dwóch łuków A i B odjąć łuk B od łuku A i przeciwnie. gdyby się odejmowało dos B od dos A, wypadłoby odjąć łuk A od łuku B. —

45. Mnożmy znowu przez siebie dwa wzory 20 i 21. otrzymamy $wst(a+b) wst(a-b) = wst^2 a\, dos^2 b - wst^2 b\, dos^2 a$ (K), a poło.. żywszy $1 - wst^2 a$, $1 - wst^2 b$ za $dos^2 a$ i $dos^2 b$. będzie

$$wst(a+b) wst(a-b) = wst^2 a(1 - wst^2 b) - wst^2 b(1 - wst^2 a) =$$

$$= wst^2 a - wst^2 a\, wst^2 b - wst^2 b + wst^2 a\, wst^2 b \text{ czyli}$$

$$wst(a+b) wst(a-b) = wst^2 a - wst^2 b \,..(9)..\, i$$

i położywszy zaś we wzorze (k) $1-dos^2 a$ i $1-dos^2 b$ za $wst^2 a$ i $wst^2 b$, wypadnie

$$wst(a+b)\, wst(a-b) = (1-dos^2 a)\, dos^2 b - (1-dos^2 b)\, dos^2 a =$$

$$= dos^2 b - dos^2 a\, dos^2 b - dos^2 a + dos^2 a\, dos^2 b \text{ czyli}$$

$$wst(a+b)\, wst(a-b) = dos^2 b - dos^2 a$$ i porównawszy ten wzór ze wzorem (g) mamy ogólnie,

$$68)\quad wst^2 a - wst^2 b = dos^2 b - dos^2 a = wst(a+b)\, wst(a-b).$$

46. W tym ostatnim wzorze połóżmy $90° - a$ zamiast łuku a, będzie $wst(90° - a+b)\, wst(90° - a-b) = wst^2(90-a) - wst^2 b = dos^2 b - dos^2(90° - a)$

albo $wst\{90-(a-b)\}\, wst\{90°-(a+b)\} = dos^2 a - wst^2 b = dos^2 b - wst^2 a$

czyli ostatecznie

$$69)\quad dos(a+b)\, dos(a-b) = dos^2 a - wst^2 b = dos^2 b - wst^2 a = dos^2 a\, dos^2 b - wst^2 a\, wst^2 b$$

odjąwszy jeszcze obiedwie strony ostatniego równania od jedności wypadnie,

$$70)\quad 1 - dos(a+b)\, dos(a-b) = 1 - dos^2 a + wst^2 b =$$
$$= wst^2 a + wst^2 b.$$

47. Dzieląc stronami odpowiednie dwa wzory 64 i 65 przez siebie otrzymamy

$$\frac{wst A + wst B}{wst A - wst B} = \frac{2\, wst \tfrac{1}{2}(A+B)\, dos \tfrac{1}{2}(A-B)}{2\, wst \tfrac{1}{2}(A-B)\, dos \tfrac{1}{2}(A+B)};$$

lecz wiemy według 12) i 13) że $\frac{wst \frac{1}{2}(A+B)}{dos \frac{1}{2}(A+B)} = sty \tfrac{1}{2}(A+B)$ i

że $\frac{dos \frac{1}{2}(A-B)}{wst \frac{1}{2}(A-B)} = dot \tfrac{1}{2}(A-B)$ więc

$$\frac{wst A + wst B}{wst A - wst B} = sty \tfrac{1}{2}(A+B)\, dot \tfrac{1}{2}(A-B),$$ gdy

zaś mnożyć przez ~~styczną~~ dotyczną albo dzielić przez styczną tegoż samego łuku (§15) jest wszystko jedno, więc osta-

tecznie

$$71)\quad \frac{\text{wst}A + \text{wst}B}{\text{wst}A - \text{wst}B} = \frac{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

48 Wiemy że $\text{sty}(a+b) = \frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)}$ rozwinąwszy drugą stronę według 20) i 22) wypada

$$\text{sty}(a+b) = \frac{\text{wst}a\,\text{dos}b + \text{wst}b\,\text{dos}a}{\text{dos}a\,\text{dos}b - \text{wst}a\,\text{wst}b},$$ dzielmy licznik jako i mianownik drugiej strony przez $\text{dos}a\,\text{dos}b$, wypadnie

$$\text{sty}(a+b) = \frac{\frac{\text{wst}a\,\text{dos}b}{\text{dos}a\,\text{dos}b} + \frac{\text{wst}b\,\text{dos}a}{\text{dos}a\,\text{dos}b}}{\frac{\text{dos}a\,\text{dos}b}{\text{dos}a\,\text{dos}b} - \frac{\text{wst}a\,\text{wst}b}{\text{dos}a\,\text{dos}b}}$$ a gdy

$\frac{\text{wst}a}{\text{dos}a} = \text{sty}a$, $\frac{\text{wst}b}{\text{dos}b} = \text{sty}b$ nadto $\frac{\text{dos}b}{\text{dos}b} = 1$ i $\frac{\text{dos}a}{\text{dos}a} = 1$

więc $$72)\quad \text{sty}(a+b) = \frac{\text{sty}a + \text{sty}b}{1 - \text{sty}a\,\text{sty}b}.$$

Wziąwszy w tym wzorze b za $-b$, więc $-b$ za b, i nadto pamiętając (§ 13) że $\text{wst}{-a} = -\text{wst}a$ a $\text{dos}{-a} = \text{dos}a$ czyli że $\frac{\text{wst}{-a}}{\text{dos}{-a}} = \text{sty}{-a} = \frac{-\text{wst}a}{\text{dos}a} = -\text{sty}a$

wypada $$73)\quad \text{sty}(a-b) = \frac{\text{sty}a - \text{sty}b}{1 + \text{sty}a\,\text{sty}b}.$$

We wzorze 72. położywszy $a=b$ wypada

$$74)\quad \text{sty}\,2a = \frac{2\,\text{sty}a}{1 - \text{sty}^2a}.$$

49. Wiemy, iż $\text{sty}a = \frac{\text{wst}a}{\text{dos}a}$ (12), podniósłszy obiedwie strony do kwadratu będzie $\text{sty}^2a = \frac{\text{wst}^2a}{\text{dos}^2a}$, dodawszy po obiedwóch stronach 1, wypada $1 + \text{sty}^2a = 1 + \frac{\text{wst}^2a}{\text{dos}^2a}$

czyli $1 + sty^2 a = \frac{wst^2 a + dos^2 a}{dos^2 a}$, a gdy $wst^2 a + dos^2 a = 1$ (9)

więc $1 + sty^2 a = \frac{1}{dos^2 a}$, przeniosłszy mianownik, będzie

$(1 + sty^2 a) dos^2 a = 1$, zkąd $dos^2 a = \frac{1}{1 + sty^2 a}$, czyli wyciągając pierwiastek kwadratowy 75) $dos a = \frac{1}{\sqrt{1 + sty^2 a}}$

Mnożąc obiedwie strony ostatniego wzoru przez sty a wypada, $sty a \, dos a = \frac{sty a}{\sqrt{1 + sty^2 a}}$, albo $\frac{wst a}{dos a} \cdot dos a = \frac{sty a}{\sqrt{1 + sty^2 a}}$

czyli ostatecznie 76) $wst a = \frac{sty a}{\sqrt{1 + sty^2 a}}$.

W ostatnich wzorach położywszy $(90 - a)$ zamiast łuku a, wypada $dos(90° - a) = \frac{1}{\sqrt{1 + sty^2 (90° - a)}}$ i $wst(90° - a) = \frac{sty(90° - a)}{\sqrt{1 + sty^2 (90 - a)}}$

a ~~gdy~~ według wzorów 1, 2, 3 będzie

$$77) \; wst a = \frac{1}{\sqrt{1 + dos^2 a}}$$

$$78) \; dos a = \frac{dos a}{\sqrt{1 + dos^2 a}}$$

50. We wzorze 6[tym] położywszy $n = 0$ ($b = a$) otrzymujemy

$dos 2a = 2 dos a \, dos a - dos 0$ czyli $dos 2a = 2 dos^2 a - 1$

a gdy na mocy wzoru 75) $dos^2 a = \frac{1}{1 + sty^2 a}$ więc mamy

$dos 2a = \frac{2}{1 + sty^2 a} - 1 = \frac{2 - 1 - sty^2 a}{1 + sty^2 a}$ czyli 79) $dos 2a = \frac{1 - sty^2 a}{1 + sty^2 a}$ i

gdy znowu $wst 2a = 2 wst a \, dos a$ (24) więc pomnożywszy i podzieliwszy drugą stronę przez dos a wypadnie,

$wst 2a = \frac{2 wst a \, dos^2 a}{dos a} = 2 sty a \, dos^2 a$, a że według 75)

$dos^2 a = \frac{1}{1 + sty^2 a}$, więc $wst 2a = 2 sty a \times \frac{1}{1 + sty^2 a}$ czyli

$$80) \; wst 2a = \frac{2 sty a}{1 + sty^2 a}$$

51. Wiemy że $stya = \frac{wsta}{dosa}$ (12) mnożąc licznik i miano-
wnik z drugiej strony raz przez 2dosa a drugi raz przez
2wsta, otrzymujemy $stya = \frac{2wsta\,dosa}{2dos^2a} = \frac{2wst^2a}{2wsta\,dosa}$
lecz $2wsta\,dosa = wst2a$ (24), $2dos^2a = 1 + dos2a$ (§39)
$2wst^2a = 1 - dos2a$ (§39) więc
$$stya = \frac{wst2a}{1+dos2a} = \frac{1-dos2a}{wst2a}$$ albo położywszy
$2a = a$ więc $a = \frac{1}{2}a$ będzie

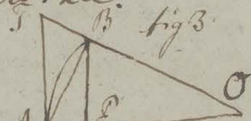
81) $$sty\tfrac{1}{2}a = \frac{wsta}{1+dosa} = \frac{1-dosa}{wsta}$$

52. Teraz dodajmy dwa wzory $stya = \frac{wsta}{dosa}$ i $dola = \frac{dosa}{wsta}$
(12 i 13) będzie $stya + dola = \frac{wsta}{dosa} + \frac{dosa}{wsta} = \frac{wst^2a + dos^2a}{wsta\,dosa}$
czyli $stya + dola = \frac{1}{wsta\,dosa} = \frac{2}{2wsta\,dosa}$ lecz $2wsta\,dosa = wst2a$ (24)
więc $stya + dola = 2 \times \frac{1}{wst2a} = 2\,dosi\,2a$ (15) ~~lu~~;
odejmując znowu też same dwa wzory wypada,
$dola - stya = \frac{dosa}{wsta} - \frac{wsta}{dosa} = \frac{dos^2a - wst^2a}{wsta\,dosa}$, a gdy
$dos^2a - wst^2a = dos2a$ (25), a $wsta\,dosa = \frac{1}{2}wst2a$ (24),
więc $dola - stya = \frac{dos2a}{\frac{1}{2}wst2a} = 2dol2a$; mamy wreszcie

82) $stya + dola = 2\,dosi\,2a$

83) $dola - stya = 2\,dol\,2a$.

II



53. Każdy łuk jest mniejszy od swojej stycznej a większy od swojej łuku wstawy. Niech będzie fig 3 łuk AB, którego styczna jest AS, a wstawa EB lub cięciwa AB. Mamy najprzód łuk AB > cięciwy AB; lecz cięciwa AB jako przeciw-

prostokątna w trójkącie ABZ większa jest od ramienia kąta
prostego ZB, a zatem tem więcej łuk AB większy jest od swojej
wstawy ZB. Powtóre wycinek kołowy BOA ma za miarę
łuk $AB \times \frac{1}{2} AO$, trójkąt znowu ATO ma za miarę $AT \times \frac{1}{2} AO$,
lecz wycinek widocznie mniejszy jest od trójkąta, mamy więc
łuk $AB \times \frac{1}{2} AO < AT \times \frac{1}{2} AO$, zkąd łuk $AB < AT$. —

Lecz w miarę tego, jako łuk AB co raz bardziej maleje,
wypada różnica zachodząca pomiędzy styczną a łukiem, łukiem
a wstawą co raz mniejsza tak dalece, że się stać może mniejszą
od wszelkiej wielkości naznaczonej jakkolwiek małej. Jakoż
wiemy, że $stya = \frac{wsta}{dosa}$, podzieliwszy obiedwie strony przez
(24) wsta, wypada $\frac{stya}{wsta} = \frac{1}{dosa}$; teraz w miarę, jako się łuk
a zmniejsza, dostawa jego równie i im więcej łuk a zbliża
się do zera, tem więcej dostawa jego zbliża się do jedności (27),
więc dla łuku nieskończenie małego stosunek $\frac{1}{dosa}$ równa się
prawie jedności, albo różnić się może od niej o mniej niż o
wszelką ilość, jakkolwiek małą naznaczoną; czyli jako się
zwykło mówić w matematyce, granicą tego stosunku
$\frac{1}{dosa}$ a zatem i stosunku $\frac{stya}{wsta}$ jest jedność, skoro łuk
a coraz bardziej maleje; toż samo rozumie się o sto-
sunkach $\frac{stya}{a}$ i $\frac{a}{wsta}$, ponieważ łuk jest zawsze zawar-
ty pomiędzy swoją styczną i wstawą.

Gdy więc granicą stosunków $\frac{stya}{a}$ i $\frac{a}{wsta}$ jest jedność,
gdy łuk nieskończenie maleje, to oczywista jest rzeczą,
że w czasie zmniejszania się łuku a, trzy wielkości
stya, a, wsta, dążą do tego, aby sobie były równe. Mo-
żna

zna nawet w każdym przypadku obrachować błąd, jaki się popełnia, kiedy się weźmie łuk za wstawę i przeciwnie. -

Okazaliśmy atoli wyżej, że $\text{st}\,a > a$, więc $\frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a} > a$, albo $\text{wst}\,a > a\,\text{dos}\,a$; gdy zaś $\text{dos}\,a$, jako mniejsza od jedności, jest ułamkiem, więc podniesiona do kwadratu daje $\text{dos}^2 a < \text{dos}\,a$, a przeto $a\,\text{dos}^2 a < a\,\text{dos}\,a$, a tem samem $\text{wst}\,a > a\,\text{dos}^2 a$; albo, gdy $\text{dos}^2 a = 1 - \text{wst}^2 a$, $\text{wst}\,a > a(1 - \text{wst}^2 a)$ czyli $\text{wst}\,a > a - a\,\text{wst}^2 a$. Lecz wiemy, że łuk $a > \text{wst}\,a$, przeto także $a^2 > \text{wst}^2 a$, a tem samem i $a^3 > a\,\text{wst}^2 a$; zkąd znowu wypada, że $a - a^3 < a - a\,\text{wst}^2 a$, że zaś jest $\text{wst}\,a > a - a\,\text{wst}^2 a$, więc $\text{wst}\,a > a - a^3$. Dodawszy a^3 po obudwóch stronach a odjąwszy $\text{wst}\,a$ wypada $a^3 > a - \text{wst}\,a$, albo $a - \text{wst}\,a < a^3$ to jest: że *różnica zachodząca pomiędzy łukiem a wstawą, mniejsza jest od trzeciej potęgi z łuku.* Jeżeli $a = 0,01$ w częściach promienia, będzie $a - \text{wst}\,a < a^3$ czyli $a - \text{wst}\,a < 0,000001$. Jeżeli $a = 0,001$ wtedy $a - \text{wst}\,a < 0,000000001$.

54. We wzorze $\text{dos}\,\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1+\text{dos}\,a}{2}}$ (58) połóżmy $a = \pi$ wypada $\text{dos}\,\frac{1}{2}\pi = \sqrt{\frac{1+\text{dos}\,\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1-1}{2}} = 0$. co wreszcie jest rzeczą wiadomą (33), lecz dalej połóżmy w tym samym wzorze $a = \frac{1}{2}\pi$, otrzymamy $\text{dos}\,\frac{1}{4}\pi = \text{dos}\,45° = \sqrt{\frac{1+\text{dos}\,\frac{1}{2}\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, co także jest wiadome (30) ale teraz z wartości $\text{dos}\,\frac{1}{4}\pi$ możemy wyrachować

dostawę

dos $\frac{1}{8}\pi$, skoro w tym wzorze położymy $a = \frac{1}{4}\pi$ i za dostawę łuku $\frac{1}{4}\pi$ jego wartość, a z tego obrachowanej dos $\frac{1}{8}\pi$ przyjdziemy do dos $\frac{1}{16}\pi$, położywszy w założonym wzorze $a = \frac{1}{8}\pi$ i za dos $\frac{1}{8}\pi$ teraz dopiero wynalezioną wartość. — Tym sposobem postępując coraz dalej wynajdziemy dostawy łuków $\frac{1}{32}\pi$, $\frac{1}{64}\pi$, $\frac{1}{128}\pi$ itd w częściach promienia wyrażone i dojdziemy do łuku tak małego, że dostawa jego może się różnić o tyle od jedności o ile zechcemy; bo gdyby się jeszcze tyle nie różniła, dosyć byłoby dalej działanie posunąć. Takowe powtarzywszy działanie opisane dziewiętnaście razy, przychodziemy do wartości dostawy łuku $\frac{\pi}{524288}$, która jest jak następuje

$$\text{dos}\,\frac{\pi}{524288} = 0,9999999999820472941..$$

i dostawa ta różni się od jedności o mniej niż 2 jedności jedenastego rzędu. —

Łuk $\frac{\pi}{524288}$, którego dopiero otrzymaliśmy dostawę, jako bardzo mały, możemy uważać za równy wstawie; i abyśmy się o tem tem widoczniej przekonali, starajmy się jeszcze wynaleźć jego wstawę i styczną według wzorów $\text{wst}\,a = \sqrt{1-\text{dos}^2 a}$ i $\text{sty}\,a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dos}\,a}$ otrzymamy,

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{524288} = 0,0000059921124526$$

$$\text{sty}\,\frac{\pi}{524288} = 0,0000059921124527.$$

Gdy zaś dwie linje styczna i wstawa różnią się pomiędzy sobą, dopiero o jedną jedność szesnastego rzędu, to tem bardziej łuk, jako środkujący pomiędzy wstawą a styczną (§53), musi być zbliżony do wstawy. Możemy więc bez popełnienia błędu w szesnastu cyfrach dziesiętnych brać,

$$\text{Łuk}\ \frac{\pi}{524288} = 0,0000059921124526$$

w częściach promienia, i jeżeli $\frac{1}{524288}$ część półokręgu koła czyli π, zamyka w częściach promienia 0,0000059921124526... to samo π zamykać będzie 524288 razy więcej i dlatego mamy

$$\pi = 0,0000059921124526 \times 524288 = 3,14159265355..$$

55. Tak obrachowawszy π, możemy już teraz wynaleźć wst 1″. Jakoż dosyć jest wynalezioną wartość π podzielić przez $180 \times 60 \times 60$; bo tym sposobem otrzymamy wartość łuku jednej sekundy wyrażoną w częściach promienia, którą możemy brać za wstawę tegoż łuku i będzie

$$\text{Łuk}\ 1'' = 0,000004848136110..$$

albowiem stosownie do wzoru $a - \text{wst}\ a < a^3$ (§53)

wstawa ta różni się od łuku o mniej niż a^3, czyli o mniej niż $(0,0000048\ldots)^3 = 0,000000000000000110592\ldots$; zkąd się pokazuje, że różnica ta zachodzić dopiero może w jednościach szesnastego rzędu. Mamy zatem,

$$wst 1'' = 0,000004848136110$$

Wyrachowawszy zaś $wst 1''$, możemy zapomocą wzorów $dos 1'' = \sqrt{1 - wst^2 1''}$, $sty 1'' = \frac{wst 1''}{dos 1''}$ i $dot 1'' = \frac{dos 1''}{wst 1''}$ obrachować wspomnione linije; albowiem sieczne i dosieczne jako nieużywane opuszczamy.

Idzie teraz o wyrachowanie wartości linij trygonometrycznych w częściach promienia innych łuków i to w porządku, zacząwszy od 2″ aż do 1′ potem do 1° przez minuty i sekundy, aż nareszcie do 90° przez stopnie minuty i sekundy. Większych łuków nie szukamy ~~linij~~ wartości linij, bo te dają się wyrazić przez linije mniejszych łuków, jak to okazaliśmy (§20 – §32) dawniej. W tym zamiarze używamy wzorów G′ (§42), zapomocą których przyjść można aż do wstawy i dostawy łuku 30°; dalej używamy wzorów (62) (63), w których zamiast b należy stosowną wartość podstawić, aby żądane wartości otrzymane zostały i tak położywszy $b = 1°$, obrachujemy wstawę i dostawę łuku 31°. To działanie posuwamy aż do

45°. Dalszych łuków niepotrzeba już szukać wstaw i dostaw, bo wynalezione służą na wszystkie przypadki. Położywszy albowiem we wzorach (1) (2) (3) (4) łuku 45°-a zamiast łuku a otrzymujemy $wst(45°-a) = dos(90°-45°+a) = dos(45°+a)$, $dos(45°-a) = wst(90°-45°+a) = wst(45°+a)$; $sty(45°-a) = dot(90°-45°+a) = dot(45°+a)$ i $dot(45°-a) = sty(90°-45°+a) = sty(45°+a)$; to jest

$$wst(45°-a) = dos(45°+a)$$
$$dos(45°-a) = wst(45°+a)$$
$$sty(45°-a) = dot(45°+a)$$
$$dot(45°-a) = sty(45°+a)$$

czyli, że wstawy, styczne łuków od zero do 45° są dostawami i dotycznemi dla łuków od 90° do 45° a dostawy i dotyczne łuków od zero do 45° są wstawami i stycznemi dla łuków od 90° do 45°. —

Dotąd podaliśmy właściwie tylko sposób obrachowania wstaw i dostaw, lecz też mając już te wiadome z łatwością znajdują się inne za pomocą wzorów $sty\,a = \frac{wst\,a}{dos\,a}$, $dot\,a = \frac{dos\,a}{wst\,a}$, albo $dot\,a = \frac{1}{sty\,a}$ (18). —

56. Wynalezione wartości linij trygonometrycznych składają się w tablice; lecz gdy w praktycznem

wiu, Dalekie dogodniej odbywają się wszelkie działania z logarytmami, dlatego też te ostatnie tylko napotykamy. Gdy zaś wstawy i dostawy równie jako i styczne łuków mniejszych od 45° a dostyczne łuków większych od 45°, są mniejsze od jedności, więc logarytmy takich wartości jako ułamkowych, wypadłyby ujemne; Dla uniknienia tej niedogodności, promień tablic trygonometrycznych nie bierze się równy jedności lecz 10000000000, którego logarytm jest 10. Przez taki promień pomnożywszy ścisłe wartości linij trygonometrycznych, biorą się ich logarytmy i które układają w tablice, albo co na jedno wychodzi, biorą się pierwiej logarytmy wartości linij trygonometrycznych i aby ich powiększa się o 10. I tak np. wiemy że wst 30° = ½ więc logwst 30° = - log 2 = = - 0.3010300, będzie więc log wst 30° = 9, 6989700

Dla oszczędzenia miejsca i ułatwienia wynajdowania logarytmów wartości linij trygonometrycznych, we układaniu wspomnionych logarytmów w tablice, trzymają się zawsze tego porządku, iż aby mieć logarytmy linij łuków mniejszych od 45°, należy ich szukać od początku tablic i to z góry na dół, gdy znowu dla otrzymania logarytmów linij większych łuków od 45°, należy ich szu..

kać od końca tablic ku początkowi i tak z do=
łu do góry. Wreszcie bliższe przypatrzenie się
np. tablicom Wegi dostatecznie to pokaże. —

57. Wszakże tablice trygonometryczne nigdy tak
obszernie nie układają się, aby łuki kolejno
przez wszystkie stopnie, minuty i sekundy wy=
szczególnione były. Zwykle używa się tu roż=
nych uproszczeń; my wspomniemy tylko
uproszczenia w tablicach Wegi zachodzące,
bo te tablice najczęściej i najpospoliciej u nas
są używane i wreszcie należą do najlepszych.
W tablicach Wegi logarytmy wartości liniy try=
gonometrycznych zaczynają się od łuku zero
przez sekundy a nawet dziesiętne części tych
sekund aż do 60" czyli jednej minuty. Że zaś
wartości, tak liczna tak małych cyfr
łuków, w pierwszych siedmiu cyfrach dziesię=
tnych, do których tablice Wegi rozciągają się,
pomiędzy sobą się nie różnią, dlatego loga=
rytmy tych trzech wielkości razem są po=

Dane.

Zaczowszy od Łuku jednej minuty, znajdują się w tablicach
Wegi, logarytmy wstawy, dostawy, styczny i dostyczny wyra„
chowane dla każdej minuty, ale już i nie dla każdej
sekundy, bo tylko dla dziesiątkowych sekund czyli dla
0", 10", 20", 30" 40" 50" a nawet i to, tylko do Łuku 6°, albo„
wiem od tego Łuku idą logarytmy ~~tylko~~ przez stopnie i
minuty. Takich więc tylko linij trygonometrycznych mo„
żna mieć logarytmy wprost z tablic, których łuki
w tychże znajdują się tablicach.

Wszakże z wielką łatwością za pomocą tablic
otrzymać się dają logarytmy i takich linij, których łuków
nie ma w tablicach. Weźmie albowiem różnicę pomiędzy
logarytmami sobie przyległemi i jeżeli logarytmy różnią
się co dziesięć sekund, to ją podzielono przez 10, jeżeli
zaś co minuta czyli co 60" to przez 60 i tym sposobem
otrzymano różnicę dla każdej sekundy. Taka różnica
napisana jest w tablicach obok logarytmu każdej
wartości trygonometrycznej w przedziałce pod znakiem
Diff 1", więc dla otrzymania logarytmów wartości
trygonometrycznych takich łuków, które i sekundy za„
mykają, szuka się logarytmu, który odpowiada stopnio„
wi i minutom, a następnie mnoży się różnicę dla je„

dnej sekundy w tablicach już gotową przez liczbę sekund, dalej iloczyn ten do wynalezionego logarytmu, albo się dodaje, albo się od niego odejmuje, według tego, jako linja trygonometryczna powiększa się lub zmniej„ sza za powiększeniem się kąta; to jest: dodaje się przy wstawach i stycznych, odejmuje przy dostawach i dostycznych. —

Jeżeli znowu dany jest logarytm należący do linji trygono„ metrycznej i potrzeba w tablicach wynaleźć kąt czyli tuku odpowiadający, wtedy szukamy najbliższego mniej„ szego logarytmu w stosownej przedziałce a ten daje stopnie i minuty, teraz dla otrzymania sekund, należy od danego logarytmu odjąć logarytm zna„ leziony w tablicach, różnicę podzielić przez różnicę dla jednej sekundy w tablicach znajdującą się w przedziałce pod znakiem Diff 1", przez co wynaj„ dzie się iloraz, liczbę sekund dający, które do wy„ nalezionego pierwej tuku dodane lub od niego odję„ te, według tego jako linja trygonometryczna z wzrostem tuku, rośnie lub maleje, dają kąt żądany. —

Przykłady. Niech będzie tuk = 4° 15' 37", mamy wynaleźć jego wsta„ wę i dostawę — Znajdujemy w tablicach tuk 4° 15' 30" i mamy logwst (4° 15' 30") = 8, 8707171

Różnica dla 1" jest 282,7, wziąwszy ją więc 7 razy, gdyż nam jeszcze brakuje 7" będzie 1978,9, różnica dla 7", którą mo„ żna brać równą 1979; gdy zaś za wzrostem tuku, rośnie i wstawa, przeto różnicę tę dodajemy do pierwszego logarytmu i mamy log wst (4° 15' 37") = 8, 8709150

Aby znowu otrzymać logdost, mamy logdos (4° 16' 30") =

6.

log dos(4° 15' 30") = 9,9987994, różnica dla jednej sekundy jest 1,5. wziąwszy ją więc 7 razy, będzie 10,5 dla 7" i można brać 11.; gdy zaś za wzrostem łuku dostawa zmniejsza się, więc tę różnicę odejmujemy od logarytmu znalezionego i wypada: log dos(4° 15' 37") = 9,9987983.

Podobnie znajdziemy log wst(17° 18' 12") i log dos(17° 18' 12")

log wst(17° 18') = 9,4733043. Róż. dla 1" jest 67,57 więc dla 12" wynosi 67,57×12 = 810,84 albo 811, gdy zaś wstawa rośnie więc jest log wst(17° 18' 12") = 9,4733854. —

Teraz log dos(17° 18') = 9,9798946. Różn. dla 1" jest 6,56 więc dla 12" wynosi 6,56×12 = 78,73 albo 79, dostawa ubywa, przeto log dos(17° 18' 12") = 9,9798867. —

Niech teraz dany będzie log wst a = 8,8786977 mamy oznaczyć wielkość kąta a. Szukajmy w tablicach logarytmu mniejszego najwięcej zbliżonego, znajdujemy

8,8785631 = log wst(4° 20' 10")

Weźmy różnicę pomiędzy znalezionym logarytmem i danym wynosi ona 1346 i dzielmy ją przez Róż. dla 1" z tablic wziętą, to jest przez 277,6 będzie $\frac{13460}{2776}$ = 4"; i gdy za wzrostem wstawy powiększa się łuk, przeto

8,8786977 = log wst(4° 20' 14") a tem samem a = 4° 20' 14"

Niech znowu będzie log dos a = 8,8786977. Szukajmy a.

Jest najprzód 8,8785631 = log dos(85° 40' 50") Różnica pomiędzy

między danym i znalezionym logarytmem wynosi 1346.
Różnica dla 1" jest 277,6. Podzieliwszy zaś wypada
$\frac{13460}{2776} = 4"$. Lecz gdy dostawa wznie, tuna maleje, a zatem
od 85° 40' 50" odjąwszy 4" wypada

$$8,8786977 = \log \cos(85° 40' 46")$$ zkąd $a = 85° 40' 46"$

W ostatnich rachunkach opuściliśmy części dziesiętne sekund, gdyby lubo żądał większego zbliżenia można je takie rachować.

58. Wszystkie wzory trygonometryczne, w których promień wzięty jest za jedność i w których widocznie się nie przedstawia, dotąd tylko pod taką postacią wyrażane bywają, dopóki do nich logarytmów nie stosujemy; przy stosowaniu zaś tych ostatnich, należy promień we wzorach przywrócić dla uniknienia błędu, jakiby powstał z powodu, że promienia tablicznego logarytm nie jest zero ale 10 (§56)
Gdy zaś wiadomem jest z algebry, że wszelkie pytania czysto matematyczne, prowadzą do wyrażeń jednorodnych czyli równostopniowych, dlatego przywrócenie promienia we wzorach trygonometrycznych nie ulega żadnym trudnościom; dosyć jest albowiem we wzorze trygonometrycznym, wyrazy wyższych stopni podzielić, albo niższych stopni pomnożyć przez taką potęgę promienia, ażeby wszystkie równostopniowe wypadły. Weźmy np wzór $\sin 5a = 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a$, przywracając promień przedstawia się ten wzór albo pod postacią

$$wrt\,5a = 5\,wrt\,a - \frac{20\,wrt^3 a}{R^2} + \frac{16\,wrt^5 a}{R^4} \text{ albo}$$

$R^4 wrt\,5a = 5R^4 wrt\,a - 20R^2 wrt^3 a + 16\,wrt^5 a$; toż samo wzór wzory $Styа = \frac{wrt\,a}{dosa}$ i $Sie\,a = \frac{1}{dosa}$, po przywróceniu promienia przedstawiają się $Stya = \frac{R\,wrt\,a}{dosa}$, $Sie\,a = \frac{R^2}{dosa}$ etc.

59. Często zachodzi potrzeba wyrażania łuków rozmaitej długości w częściach promienia. Podobne wyrażenia otrzymuje się przez proste pomnożenie łuku 1" wyrażonego w częściach promienia przez liczbę sekund mieszczących się w danym łuku: bo jeżeli α wyraża część promienia jednej sekundy, tedy A" liczba sekund jakiego łuku, wyrażać ich będzie A" razy więcej czyli A"α. Jest zaś długość łuku 1" w częściach promienia czyli α następująca

$$\alpha = 0{,}0000048481368110 = wrt\,1'' \;(\S 55)$$

Jeżeli więc długość łuku odpowiadającego A" wyrażona w częściach promienia, czyli jako się inaczej mówi zużyto, w promieniu, nazwiemy przez L, to mamy na zamianę łuku sekundowego na łuk w promieniu wzór

$$L = A''\alpha \text{ albo lepiej } L = A''wrt\,1'' \quad (z)$$

Mnożąc α czyli wrt 1" przez 2. 3. 4. … 60 otrzymamy długości w promieniu łuków od jednej sekundy do jednej minuty, mnożąc znowu dalej ostatni łuk w promieniu przez 2. 3. . 60 otrzymamy długości łuków w promieniu do 1° a postępując dalej, możemy otrzymać długości łuków w promieniu

do 180°. Tym sposobem wynalezione długości i ułożo-
ne w tablicę, posłużą do prędkiej zamiany w czasie
potrzeby łuku danego w stopniach minutach i sekundach
na łuk w promieniu. Podobna tablica znajduje
się przy końcu tablic logarytmowych Wegi. –
Niech będzie potrzeba 57°17'44,8" wyrazić w promieniu
W tablicach wspomnionych znajdujemy najprzód

57° w promieniu = 0,99483767
17' " = 0,00494510
44" " = 0,00021332
0,8" " = 0,00000389

57°17'44,8 w promieniu 0,99999998 = 1.

Liczba dla 0,8" wynaleziona została przez pomnożenie
α czyli wℓ1" przez 0,8"

Niech jeszcze będzie łuk 76°24'39"

76° w promieniu = 1,32645023
24' " = 0,00698132
39" " = 0,00018908

76°24'39" w promieniu = 1,33362063

Nawzajem znowu wypada niekiedy zamieniać łuk
w promieniu na łuk sekundowy. W takim przypad-
ku potrzeba koniecznie wiedzieć ile łuk równy długo-
ści promienia zamyka stopni minut i sekund. Bo
jeżeli przez R" nazwiemy liczbę sekund łuku równego
promieniowi, przez L łuk inny w promieniu a przez
A" liczbę sekund odpowiadającą ostatniemu łukowi,

to mamy następujące pytanie „Kiedy łuku długości promienia czyni R'', ileż łuku długości L w promieniu uczyni sekund" a pytanie to rozwiązuje następująca proporcya

$$1 : R'' = L : A'' \text{ zkąd } A'' = LR'' \quad (x)$$

Wzór ostatni pokazuje, że długość łuku w promieniu, należy pomnożyć przez liczbę sekund zamkniętych w łuku długości promienia, aby wyrazić łuk przez sekundy; a zatem przez stopnie minuty i sekundy.

Chodzi więc tylko o wynalezienie R''. Że zaś $\pi = 3,1415926535 5(554)$ części promienia, więc jeden promień tyleż razy, zawiera się będzie mniej stopni. I zamieniwszy π przez pomnożenie przez 60×60 czyli 3600 na sekundy, wypada iż

$$R'' = \frac{180 \cdot 3600}{3,14159265355} = 206264,8'' = 57^\circ 17' 44,8''$$

nadto $\log R'' = \log 206264.8 = 5,3144251$; jest ten logarytm umieszczony w tablicach Wegi, po logarytmach liczb zwyczajnych. Mamy łuk 1,33362063 zamienić na łuk sekundowy.

Jest $A'' = LR''$ więc $\log A'' = \log L + \log R''$

$$\log L = \log 1.33362063 = 0,1250323$$
$$\log R'' = \quad 5,3144251$$
$$\overline{\quad 5,4394574}$$

temu logarytmowi w tablicach odpowiada liczba 275079 więc $A'' = 275075'' = 76^\circ 24' 39''$

60. Ze wzorów (z) i (x) poprzedzającego ustępu mamy także $A'' = \frac{L}{\text{wsi}1''}$ i $L = \frac{A''}{R''}$

to jest, że liczba sekund jakiego łuku znajduje się także, jeżeli jego długość w promieniu podzielemy przez wsi1''; a długość jakiego łuku w promieniu otrzymuje się, jeżeli długość jego sekundowa podzielimy przez liczbę sekund w promieniu czyli

przez łuk równy promieniowi.
Jeżeli we wzorze pierwszym niniejszego ustępu, założymy $L = 1$, wtedy A'' wyrazi liczbę sekund w promieniu i mamy drugi wzór do obrachowania R'' następujący

$$R'' = \frac{1}{\text{wst}\,1''}$$

III

61. Rozbierając na czynniki pierwszą stronę wzoru $\text{dost}^2\alpha + \text{wst}^2\alpha = 1$, otrzymujemy wyrażenie $(\text{dost}\,\alpha + \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\alpha)(\text{dost}\,\alpha - \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\alpha) = 1$, którego pierwsza strona składa się z dwóch czynników urojonych. Te czynniki czyli wyrażenia urojone jednocześnie dają się tak wyrazić $\text{dost}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\alpha$ i dopóki α nie ma wartości naznaczonej, mogą być przerobione z wyrażeń algebraicznych urojonych postaci ogólnej $a \pm b\sqrt{-1}$; bo dosyć jest w takim przypadku położyć $\text{dost}\,\alpha = a$, $\text{wst}\,\alpha = b$, zkąd α może być wyrażone w funkcyi a i b, gdyż ~~[illegible]~~ mamy przez podzielenie $\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha} = \frac{b}{a}$ czyli $\text{styc}\,\alpha = \frac{b}{a}$. to jest, że α należy tak dobrać aby $\text{styc}\,\alpha$ była równa $\frac{b}{a}$; lecz α może być także obrachowane zapomocą wstawy albo dostawy, podstawiwszy albowiem we wzory (75 i 76) $\frac{b}{a}$ za $\text{styc}\,\alpha$ otrzymujemy

$$\text{dost}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i}$$

$$\text{wst}\,\alpha = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

62. Mnożymy teraz $(\text{dost}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\alpha)(\text{dost}\,\beta \pm \sqrt{-1}\,\text{wst}\,\beta)$ otrzymujemy

$$dos\alpha\, dos\beta \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha\, dos\beta \pm \sqrt{-1}\, wrt\beta\, dos\alpha - wrt\alpha\, wst\beta =$$

$$dos\alpha\, dos\beta - wrt\alpha\, wst\beta \pm \sqrt{-1}\,(wrt\alpha\, dos\beta + wrt\beta\, dos\alpha) =$$

$dos(\alpha+\beta) \pm \sqrt{-1}\, wrt(\alpha+\beta)$ tojest że,

(θ) $(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)(dos\beta \pm \sqrt{-1}\, wrt\beta) = dos(\alpha+\beta) \pm \sqrt{-1}\, wrt(\alpha+\beta)$

Zkąd się pokazuje, że iloczyn jest tej samej postaci co i czynniki i że w iloczynie łuk jest summą łuków znajdujących się w czynnikach.

Z ostatniego prawa wypada także prawidło dzielenia wyrażeń urojonych; i aby otrzymać iloraz należy łuki od siebie odjąć np $\frac{dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha}{dos\beta \pm \sqrt{-1}\, wrt\beta} = dos(\alpha-\beta) \pm \sqrt{-1}\, wrt(\alpha-\beta)$; i gdyż wymnożywszy ten iloraz przez dzielnik wypada $dos(\alpha-\beta+\beta) \pm \sqrt{-1}\, wrt(\alpha-\beta+\beta)$ czyli $dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha$, tojest dzielna, jako być powinno.

Gdy zaś $(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)^2 = (dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha) =$
$= dos2\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt2\alpha$ i
$(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)^3 = (dos2\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt2\alpha)(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha) = dos3\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt3\alpha$
więc i w ogólności

$$(dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)^m = dos\, m\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\, m\alpha. \quad (\gamma)$$

gdzie m znaczy liczbę całkowitą.

Przeciwnie teraz musi być koniecznie $\sqrt[m]{dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha} =$
$= (dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha)^{\frac{1}{m}} = dos\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-1}\, wrt\frac{\alpha}{m}$; i gdyż skoro się wyrażenie $dos\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-1}\, wrt\frac{\alpha}{m}$ podniesie do potęgi wypada
$(dos\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-1}\, wrt\frac{\alpha}{m})^m = dos\, m\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-1}\, wrt\, m\frac{\alpha}{m} = dos\alpha \pm \sqrt{-1}\, wrt\alpha$.
wyrażenie, z którego mieliśmy wyciągnąć pierwiastek stopnia m.

Nawet ogólniej mamy jeszcze

$$(\mathrm{dos}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\alpha)^{\frac{m}{n}} = \mathrm{dos}\,\frac{m\alpha}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\frac{m\alpha}{n}$$

jestto tako nazwany od wynalazcy wzór Moivre'a, który dotąd udowodniliśmy tylko dla wykładnika całkowitego i ułamkowego dodatnego, zostawiając inne przypadki na później. Z jeżeli przez m rozumieć będziemy liczbę całkowitą lub ułamkową, to mamy

$$84)\quad (\mathrm{dos}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\alpha)^{m} = \mathrm{dos}\,m\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,m\alpha.$$

63. Szukajmy teraz logarytmu wyrażenia urojonego $\mathrm{dos}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\alpha$, co najłatwiej uskutecznić się daje za pomocą wzoru $\mathrm{l\acute{o}g}\,a = n(a^{\frac{1}{n}}-1)$ kiedy $n=\infty$ (§I przyp.) Jest wtedy

$$\mathrm{l\acute{o}g}(\mathrm{dos}\,\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\alpha) = n\{(\mathrm{dos}\,\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\alpha)^{\frac{1}{n}} - 1\} =$$
$$= n\,\mathrm{dos}\,\tfrac{\alpha}{n} + n\sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\tfrac{\alpha}{n} - n.$$
$$= n\left(\mathrm{dos}\,\tfrac{\alpha}{n} - 1\right) + n\sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\tfrac{\alpha}{n}.$$

Idzie teraz o wynalezienie granic wyrażeń $n(\mathrm{dos}\,\frac{\alpha}{n}-1)$ i $n\sqrt{-1}\,\mathrm{wrt}\,\frac{\alpha}{n}$, kiedy n nieskończenie rośnie. Mamy najprzód $n(\mathrm{dos}\,\frac{\alpha}{n}-1) =$ $= -n(1-\mathrm{dos}\,\frac{\alpha}{n}) = -2n\,\mathrm{wrt}^2\frac{\alpha}{2n}$ (57), albo mnożąc i dzieląc jednocześnie drugą stronę $\frac{\alpha}{2n}$ otrzymujemy $n(\mathrm{dos}\,\frac{\alpha}{n}-1) = -\dfrac{\frac{\alpha}{2n}\cdot 2n\,\mathrm{wrt}^2\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}} = -\dfrac{\alpha\,\mathrm{wrt}^2\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}$, rozkładając na czynniki wypada $n(\mathrm{dos}\,\frac{\alpha}{n}-1) = \dfrac{-\alpha\,\mathrm{wrt}\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}\,\mathrm{wrt}\,\frac{\alpha}{2n}.$

jeżeli n jest nieskończenie wielkie granica czynnika $\frac{\text{wst}\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}$ jest jedności (§53), granica drugiego czynnika $\text{wst}\frac{\alpha}{2n}$ jest 0 a zatem i całego iloczynu, czyli że granica $n(\text{dos}\frac{\alpha}{n}-1)$ jest zero. gdy $n=\infty$

Mamy powtóre $\frac{\alpha}{n}-\text{wst}\frac{\alpha}{n} < \text{sty}\frac{\alpha}{n}-\text{wst}\frac{\alpha}{n}$ (§53) albo

$\frac{\alpha}{n}-\text{wst}\frac{\alpha}{n} < \text{sty}\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\text{wst}\frac{\alpha}{n}}{\text{sty}\frac{\alpha}{n}}\right) < \text{sty}\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\text{wst}\frac{\alpha}{n}}{\frac{\text{wst}\frac{\alpha}{n}}{\text{dos}\frac{\alpha}{n}}}\right) < 1-\frac{\text{wst}\frac{\alpha}{n}}{\text{wst}\frac{\alpha}{n}}\cdot\text{dos}\frac{\alpha}{n}$

albo nakoniec $\frac{\alpha}{n}-\text{wst}\frac{\alpha}{n} < \text{sty}\frac{\alpha}{n}(1-\text{dos}\frac{\alpha}{n})$, mnożąc tę nierówność przez n jest, $\alpha - n\,\text{wst}\frac{\alpha}{n} < \text{sty}\frac{\alpha}{n}\,n(1-\text{dos}\frac{\alpha}{n})$

lecz granica drugiej strony jest zero, kiedy n jest nieskończenie wielkie, bo tak pierwszy czynnik $\text{sty}\frac{\alpha}{n}$ jako i drugi $n(1-\text{dos}\frac{\alpha}{n})$, jakeśmy dopiero okazali, mają za granicę zero kiedy $n=\infty$, więc tem bardziej pierwsza strona czyli $\alpha - n\,\text{wst}\frac{\alpha}{n}=0$ zkąd $n\,\text{wst}\frac{\alpha}{n}=\alpha$ kiedy $n=\infty$ i podobnie się okazuje, że $n\,\text{sty}\frac{\alpha}{n}=\alpha$ kiedy $n=\infty$; więc

$\text{l'og}(\text{dos}\,\alpha+\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}) = n(\text{dos}\frac{\alpha}{n}-1)+n\,\text{wst}\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1} = \alpha\sqrt{-1}$ gdy $n=\infty$;

podobnie się dowodzi, że $\text{l'og}(\text{dos}\,\alpha-\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}) = -\alpha\sqrt{-1}$.

64. Naznaczmy zasadę logarytmów neperowskich przez e, wtedy mamy $e^{\alpha\sqrt{-1}} = \text{dos}\,\alpha+\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}$ (85)

(86) $e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \text{dos}\,\alpha-\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}$., zkąd znowu przez dodawanie i odejmowanie otrzymujemy,

(87) $\text{dos}\,\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}+e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$

(88) $\text{wst}\,\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}-e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

65. Wzory 85. i 86. jednocześnie dadzą się tak wy„ pisać $dos\alpha \pm wst\alpha\sqrt{-1} = e^{\pm\alpha\sqrt{-1}}$ (m)

połóżmy teraz w tym wzorze $\alpha \pm 2\pi c$ za α, gdzie c ma wartości całkowite i dodatne i gdy $dos\alpha = dos(\alpha \pm 2\pi c)$, $wst\alpha = wst(\alpha \pm 2\pi c)$, to będzie

$$dos\alpha \pm wst\alpha\sqrt{-1} = e^{\pm(\alpha \pm 2\pi c)\sqrt{-1}},$$

podnieśmy dalej to równanie do potęgi n, gdzie n każdą wielkość współmierną lub niewspółmierną na„ wet urojoną oznaczać może, wypada:

$$(dos\alpha \pm wst\alpha\sqrt{-1})^n = e^{\pm n(\alpha \pm 2\pi c)\sqrt{-1}} \quad (n)$$ położywszy dalej w równaniu (m) $n(\alpha \pm 2\pi c)$ za α wypadnie

$$dos\, n(\alpha \pm 2\pi c) \pm wst\, n(\alpha \pm 2\pi c)\sqrt{-1} = e^{\pm n(\alpha \pm 2\pi c)\sqrt{-1}},$$

a porównawszy dwa ostatnie równania, otrzyma„ my $(dos\alpha \pm wst\alpha\sqrt{-1})^n = dos\, n(\alpha \pm 2\pi c) \pm wst\, n(\alpha \pm 2\pi c)\sqrt{-1}$.

tym sposobem potrafiliśmy rozciągnąć wzór Moi„ vrea do wszystkich przypadków ilości n.

66. We wzorach (85) i (86) sprawdźmy się rozwinąć strony prawe według szeregu logarytmicznego na e^{α} (81 przypisy) to jest według $e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} +$ itd

znajdziemy

$$dos\alpha + wst\alpha\sqrt{-1} = e^{\alpha\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\alpha\sqrt{-1}}{1} - \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^3\sqrt{-1}}{1.2.3.} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.}$$

$$dos\alpha - wst\alpha\sqrt{-1} = e^{-\alpha\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\alpha\sqrt{-1}}{1} - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.}$$

dodawszy i odjąwszy od siebie dwa ostatnie ro„

wnania wypada,

$$2\cos\alpha = 2\left(1-\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{itd}\right)$$

$$2\sin\alpha\sqrt{-1} = 2\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{itd}\right)\sqrt{-1}.$$

albo dzieląc pierwsze równanie przez 2 a drugie przez $2\sqrt{-1}$ otrzymamy ostatecznie —

$$89)\quad \cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots$$

$$90).\quad \sin\alpha = \alpha-\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots$$

obadwa te szeregi dla wszelkich wartości α skończonych zawartych pomiędzy $\alpha=+\infty$ i $\alpha=-\infty$ są zbiegające się, to jest takie, że wziąwszy pewną liczbę wyrazów od początku np. n, summa opuszczonych ciągle się i nieskończenie się zmniejsza, za wzrostem n i nakoniec niknie kiedy $n=\infty$

67. Dzielmy wzór (90) przez (89) wypada

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \alpha\left\{\frac{1-\frac{\alpha^2}{2.3}+\frac{\alpha^4}{2.3.4.5}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.7}\cdots}{1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6}\cdots}\right\}$$

szereg zamknięty pomiędzy nawiasami załóżmy równy $1+A\alpha^2+B\alpha^4+C\alpha^6\cdots$ będzie

$$1-\frac{\alpha^2}{2.3}+\frac{\alpha^4}{2.3.4.5}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6.7}\cdots=\left(1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{2.3.4}-\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6}\right)\left(1+A\alpha^2+B\alpha^4+C\alpha^6\cdots\right)$$

$$=1\ \begin{array}{r|}-3\\+2.3A\\ \vdots\end{array}\frac{\alpha^2}{2.3}\ \begin{array}{r|}+5\\-3.4.5A\\+2.3.4.5B\end{array}\frac{\alpha^4}{2.3.4.5}\ \begin{array}{r|}-7\\+5.6.7A\\-3.4.5.6.7B\\+2.3.4.5.6.7C\end{array}\frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6.7}$$

Przeniosłszy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę wypada

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c}
+1 & -1 & \frac{\alpha^2}{2.3}\ +1 & \frac{\alpha^4}{2.3.4.5}\ -1 & \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6.} \\
-1 & +3 & -5 & +7 & \\
 & -6A & +3.4.5A & -5.6A & \\
 & & -2.3.4.5B & +3.4.5.6.7B. & \\
 & & & -2.3.4.5.6.7C &
\end{array}\right\} = 0.$$

więc mamy

$-6A + 2 = 0$, $\quad -4 + 3.4.5.A = 2.3.4.5.B.$, $\quad 6 - 5.6.7 \times \frac{1}{3} + 3.4.5.6.7 \times \frac{2}{3.5} = 2.3.4.5.6.7C$

$A = \frac{1}{3}.$ $\quad -4 + 3.4.5 \times \frac{1}{3} = 2.3.4.5.B'$, $\quad 3.6 - 5.6.7 + 2.3.4.6.7 = 2.3^2.4.5.6.7C$

$B = \frac{4.5-4}{2.3.4.5} = \frac{4(5-1)}{2.3.4.5} = \frac{4}{2.3.5} = \frac{2}{3.5}$, $\quad 6(3-35+168) = 2.3^2.4.5.6.7C$

$6 \times 136 = 2.3^2.4.5.6.7C$

$C = \frac{136}{2.3^2.4.5.7} = \frac{17}{3^2.5.7}.$

a zatem

$$91)\quad \operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{3.5} + \frac{17\alpha^7}{3^2.5.7} + \frac{62\alpha^9}{3^2.5.7.9} + \dots$$

w podobny znajdziemy sposób

$$92)\quad \cot\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{3^2.5} - \frac{2\alpha^5}{3^2.5.7}.$$

68. Z szeregu 90 przez powrót szeregów (retour des suites) możemy otrzymać szereg wyrażający łuk przez sinus; jakoż połóżmy w tym szeregu $\sin\alpha = x$ mamy

$x = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7} + \dots$ połóżmy dalej

$\alpha = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 \dots (h)$, równanie pierwsze podnieśmy do potęgi 3, 5, 7, .. a otrzymamy

$x^3 = \alpha^3 - \frac{3}{2.3}\alpha^5 + \frac{13}{2.3.4.5}\alpha^7 \dots$

$x^5 = \alpha^5 - \frac{5}{2.3}\alpha^7 \dots$

$x^7 = \alpha^7 \dots$

podstawiwszy teraz wartości za $\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$ w szereg (h) w którym α przenieśmy na drugą stronę, wypada:

$$\theta = \left.\begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\right| \alpha \left.\begin{matrix} -\frac{A}{2.3} \\ +B \end{matrix}\right| \alpha^3 \left.\begin{matrix} +\frac{A}{1.2.3.4.5} \\ -\frac{3B}{2.3} \\ +C \end{matrix}\right| \alpha^5 \left.\begin{matrix} -\frac{A}{1.2.3.4.5.6.7} \\ +\frac{13B}{2.3.4.5} \\ -\frac{5C}{2.3} \\ +D \end{matrix}\right| \alpha^7$$

zkąd mamy $A = 1.$

$$B = \frac{1}{2.3}.$$

$$C = \frac{3}{2.3}\Big(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4.5} = \frac{3}{2.4.5}$$

$$D = \frac{5}{2.3}\Big(\frac{3}{2.4.5} - \frac{13}{2.3.4.5}\Big(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} = \frac{3.5}{2.4.6.7}$$

więc α daje się łatwo wyrazić każdego znowu wstα za α.

$$93)\quad \alpha = \text{wst}\,\alpha + \frac{\text{wst}^3\alpha}{2.3} + \frac{1.3\,\text{wst}^5\alpha}{2.4.5} + \frac{3.5\,\text{wst}^7\alpha}{2.4.6.7} + \dots$$

szereg ten jest zbiegającym się od wst$\alpha = -1$ do wst$\alpha = +1$.

69. Z szeregu (69) także przez powrót szeregów moglibyśmy otrzymać szereg wyrażający łuk przez styczną, ale dla otrzymania podobnego szeregu można także użyć następującego sposobu, w którym się ten szereg wprost otrzymuje.

W wiadomym szeregu z nauki o logarytmach (§ II przypis.)

$$(g)\quad \log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \dots$$ połóżmy

sty$\alpha\sqrt{-1}$ za u, ponieważ jest $1+u = 1+\text{sty}\,\alpha\sqrt{-1} =$

$$= 1 + \frac{\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}}{\text{dos}\,\alpha} = \frac{\text{dos}\,\alpha}{\text{dos}\,\alpha} + \frac{\text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}}{\text{dos}\,\alpha} = \frac{1}{\text{dos}\,\alpha}\left(\text{dos}\,\alpha + \text{wst}\,\alpha\sqrt{-1}\right) =$$

$r(\text{dos}\,\alpha + \text{wst}\,\alpha\sqrt{-1})$, gdy $\frac{1}{\text{dos}\,\alpha}$ położymy równe r. więc

$$\log(1+u) = \log(1+\text{sty}\,\alpha\sqrt{-1}) = n\{r^{\frac{1}{n}}(\text{dos}\,\alpha + \text{wst}\,\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - 1\}$$ kiedy $n=\infty$

czyli $\log(1+\text{sty}\,\alpha\sqrt{-1}) = r^{\frac{1}{n}} n\,\text{dos}\,\frac{\alpha}{n} + r^{\frac{1}{n}} n\,\text{wst}\,\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1} - n$ (84),

na drugiej stronie dodajmy i odejmijmy $nr^{\frac{1}{n}}$ będzie

$$\log(1+\text{sty}\,\alpha\sqrt{-1}) = nr^{\frac{1}{n}}\text{dos}\,\frac{\alpha}{n} + nr^{\frac{1}{n}}\text{wst}\,\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1} - n + nr^{\frac{1}{n}} - nr^{\frac{1}{n}} =$$

$$= r^{\frac{1}{n}} n\left(\text{dos}\,\frac{\alpha}{n} - 1\right) + r^{\frac{1}{n}} n\,\text{wst}\,\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1} + n\left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right);$$

Kiedy zaś $n=\infty$, ~~mamy~~ jest najprzód $r^{\frac{1}{n}}$ ma za granicę jedność,

powtóre granicą $n(\text{dos}\,\frac{\alpha}{n} - 1)$, jest zero. (§63)

potrzecie granicą $n\,\text{wst}\,\frac{\alpha}{n}\sqrt{-1}$, jest $\alpha\sqrt{-1}$ (§63) nakoniec

nic $n(r^{\frac{1}{n}} - 1)$ ma za granicę ~~czyli logarytmiczną~~ jest $\log r$. (§I przyp.)

a więc

$$\log(1+\text{sty}\,\alpha\sqrt{-1}) = \log r + \alpha\sqrt{-1} = \log(1+u).$$ czyli

na zasadzie szeregu (9) jest.

~~$\log r + \alpha\sqrt{-1} = \text{sty}\,\alpha\sqrt{-1} - \frac{1}{3}\text{sty}^3\alpha + \frac{1}{5}\text{sty}^5\alpha\sqrt{-1} - \frac{1}{7}\alpha$~~

$$\log r + \alpha\sqrt{-1} = \text{sty}\,\alpha\sqrt{-1} + \frac{\text{sty}^2\alpha}{2} - \frac{\text{sty}^3\alpha\sqrt{-1}}{3} - \frac{\text{sty}^4\alpha}{4} + \frac{\text{sty}^5\alpha\sqrt{-1}}{5} + \frac{\text{sty}^6}{6} + \dots$$

albo równając części rzetelne pomiędzy sobą i urojone takie pomiędzy, co zawsze ma miejsce w podobnych razach, jakeśmy już kilka razy o tem przekonali się (§64. §66) będzie

$$\alpha\sqrt{-1} = \text{sty}\,\alpha\sqrt{-1} - \frac{\text{sty}^3\alpha\sqrt{-1}}{3} + \frac{\text{sty}^5\alpha\sqrt{-1}}{5}$$ albo dzieląc przez $\sqrt{-1}$

94) $$\alpha = \frac{\text{sty}\,\alpha}{1} - \frac{\text{sty}^3\alpha}{3} + \frac{\text{sty}^5\alpha}{5} - \frac{\text{sty}^7\alpha}{7} + \dots$$ {od $\text{sty}\,\alpha = -1$ do $\text{sty}\,\alpha = +1$}

Druga część daje

(95) $$\log r = \log\frac{1}{\text{dos}\,\alpha} = \log\text{siecz}\,\alpha = \frac{\text{sty}^2\alpha}{2} - \frac{\text{sty}^4\alpha}{4} + \frac{\text{sty}^6\alpha}{6} - \frac{\text{sty}^8\alpha}{8} + \dots$$

78. Szereg 94. może być zastosowany do wyrachowania stosunku obwodu koła do promienia czyli do wyrachowania liczby Ludolpha π. w następujący sposób.

Połóżmy w tym szeregu $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, to wtedy wypada $sty\,\alpha = 1$. (31)

∴ będzie $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

przez ten szereg, podany od Leibnitza, bardzo prostym sposobem może być π obrachowane; gdy jednakże szereg ten ~~dla~~ ~~nader~~ za bardzo powolnie zbiegający się, jakto już sam Leibnitz uważał, dlatego do prawdziwego wyrachowania π nie używany bywa. —

Jeżeli teraz położymy $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ wtedy, gdy $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (28) a $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, jest $sty\,30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. i podług szeregu (94)

mamy $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{3.3^2\sqrt{3}} \ldots$ albo

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} \ldots\right)$$

Dla otrzymania szeregów więcej zbiegających się, najlepiej jest według Eulera łuk 45 czyli $\frac{\pi}{4}$ rozłożyć na dwa łuki, aby już styczne wspólmierne wypadły, i aby ile można się przez małe i proste ułamki wyrażone były.

Połóżmy np. $a + b = 45^\circ$ będzie

$sty(a+b) = sty\,45^\circ = 1 = \frac{sty\,a + sty\,b}{1 - sty\,a\,sty\,b}$ i wziąwszy $sty\,a = \frac{1}{2}$

otrzymamy $1 = \frac{\frac{1}{2} + sty\,b}{1 - \frac{1}{2}sty\,b}$ czyli $1 - \frac{1}{2} = sty\,b + \frac{1}{2}sty\,b$ albo

$sty\,b = \frac{1}{3}$. więc według szeregu (94) jest

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} \ldots$

$b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^5} \ldots$ dodając zaś gdy $(a+b) = \frac{\pi}{4}$

więc $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$

Weźmy dalej $2A+B=45^\circ$ i połóżmy $\operatorname{stg} A = \frac{1}{3}$

gdy zaś $\operatorname{stg} 2A = \frac{2\operatorname{stg} A}{1-\operatorname{stg}^2 A}$ (74) więc $\operatorname{stg} 2A = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$

i znowu gdy $1 = \operatorname{stg}(2A+B) = \frac{\frac{3}{4}+\operatorname{stg} B}{1-\frac{3}{4}\operatorname{stg} B}$ więc $\operatorname{stg} B = \frac{1}{7}$

a zatem

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \cdots \quad i \quad B = \frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} \cdots$$

a tem samem ponieważ $2A+B=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7}\cdots\right) + \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7}\cdots\right)$$

Położywszy znowu $4A+B=45^\circ$ i $\operatorname{stg} A = \frac{1}{5}$, przez co

$\operatorname{stg} 4A = \frac{120}{119}$, tu wypada $1 = \frac{\frac{120}{119}+\operatorname{stg} B}{1-\frac{120}{119}\operatorname{stg} B}$ czyli $\operatorname{stg} B = -\frac{1}{239}$.

a zatem

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7}\cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5}\cdots\right).$$

W podobny sposób można jeszcze wytłoczyć łuk 45° na następujące $\frac{\pi}{4} = 8 \text{ łuk stg } \frac{1}{10}$^ $- 4 \text{ łuk stg } \frac{1}{515} - \text{łuk stg } \frac{1}{239}$

i $\frac{\pi}{4} = 5 \text{ łuk stg } \frac{1}{7} + 2 \text{ łuk stg } \frac{3}{79}$ ..

pierwsze wyrażenie podane przez Burengeigera daje

$$\frac{\pi}{4} = 8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5}\cdots\right) - 4\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3.515^3} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3}\cdots\right)$$

drugie znowu

$$\frac{\pi}{4} = 5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7}\cdots\right) + 2\left(\frac{3}{79} - \frac{3^3}{3.79^3} + \frac{3^5}{5.79^5}\cdots\right)$$

W podobnym zamiarze może być także użyty szereg (93)

bo położywszy $\alpha = 45^\circ$ $\text{wst}\,\alpha = \text{wst}\,45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ i będzie

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2.2.3} + \frac{1.3}{2^3.2.4.5} + \frac{1.3.5}{2^5.2.4.6.7}\cdots\right)$$

dla $\alpha = 30 = \frac{\pi}{6}$ jest $\text{wst}\,\alpha = \text{wst}\,30^\circ = \frac{1}{2}$ a zatem

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3.2.3} + \frac{1.3}{2^5.2.4.5} + \frac{1.3.5}{2^7.2.4.4.6}\cdots$$

---

^ wyrażenie podobne jest szczególnym i znaczy łuk do którego styczna należąca równa się $\frac{1}{10}$ jedności czyli promienia

przenoszę cyfry dziesiątne liczby π, której dotąd 140 cyfer dokładnie jest znanych. są $\pi = 3,14159265358979323846 2$.

71. Ze wzoru Moivrea (§ 65). $(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = \cos n(\alpha \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\sin n(\alpha \pm 2r\pi)$, kiedy n jest liczbą całkowitą otrzymujemy jedną tylko wartość dla n^{tej} potęgi $\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha$, jakąkolwiek wreszcie będzie miało wartość r; albowiem $\cos n(\alpha \pm 2r\pi) = \cos n\alpha$ i $\sin n(\alpha \pm 2r\pi) = \sin n\alpha$. Jeżeli jednakże n jest ułomkiem i już sprowadzonym do najprostszego swojego wyrażenia $\frac{s}{m}$, tak iż $n = \frac{s}{m}$ i położywszy w takim przypadku za r porządkiem wartości $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m-1, m, m+1$, te otrzymany z wyrażenia $n(\alpha \pm 2r\pi)$ odpowiednio następujące wypadki,

$$\frac{s}{m}\alpha,\quad \frac{s}{m}\alpha \pm \frac{2s}{m}\pi,\quad \frac{s}{m}\alpha \pm \frac{4s}{m}\pi \ldots\ldots$$

$$\frac{s}{m}\alpha \pm \frac{2s(m-1)}{m}\pi,\quad \left(\frac{s}{m}\alpha \pm \frac{2sm}{m}\pi\right) = \left(\frac{s}{m}\alpha \pm 2s\pi\right),$$

$$\frac{s}{m}\alpha \pm \frac{2s(m+1)}{m}\pi = \left(\frac{s}{m}\alpha \pm \frac{2s}{m}\pi \pm 2s\pi\right). —$$

Z tych kątów, jeżeli uważać będziemy z podwójnych znaków same górne albo same dolne dla siebie, tylko m kątów mają odmienne sinusy i cosinusy; albowiem począwszy od wartości $r = m$, której odpowiada kąt $\left(\frac{s}{m}\alpha \pm 2s\pi\right)$ sinusy i cosinusy już się wracają (50, 51), tak iż ten kąt ma z pierwszym dla wartości $r = 0$, kąt dla wartości $m+1$ z drugim dla wartości $r = 1$ takiem itd też same sinusy i cosinusy, więc zacząwszy od m szereg sinusów i cosinusów znowu się powtarza. —

Łatwo nawet widzieć się daje, że przy

zatrzymaniu podwóynych znaków, dość jest dla r nadać tylko porządkiem wartości $0, 1, 2, \ldots \frac{m}{2}$ albo $\frac{m-1}{2}$, według tego, jako m jest parzyste lub nieparzyste, aby wszystkie potrzebne łuki m otrzymane zostały, których wstawy i dostawy pomiędzy sobą różnią się; albowiem w pierwszym przypadku, kiedy m jest parzyste, podstawiwszy za r liczbę $\frac{m}{2}-1$ i biorąc znak dolny otrzymany łuk, którego wstawa i dostawa takaż sama wypada, jaka się otrzymuje po wypadku łuku, który za drugiem postawieniem, weźmie się $r=\frac{m}{2}+1$ i uważa znak górny i przeciwnie. Gdyż w pierwszym razie w wyrażeniu $\frac{s}{m}(\alpha \pm 2r\pi)$ biorąc znak dolny i $r=\frac{m}{2}-1$, wypada łuk $\frac{s}{m}\left\{\alpha \mp 2\left(\frac{m-2}{2}\right)\pi\right\} = \frac{s}{m}(\alpha - m\pi + 2\pi) =$

$= \frac{s\alpha + 2s\pi}{m} - s\pi = \alpha - s\pi$, jeżeli dla krótkości nazwiemy $\frac{s\alpha+2s\pi}{m} = \alpha$; w drugim znowu razie biorąc znak górny i $r = \frac{m}{2}+1 = \frac{m+2}{2}$ wypada

$$\frac{s}{m}\left\{\alpha + 2\left(\frac{m+2}{2}\right)\pi\right\} = \frac{s\alpha+2s\pi}{m} + s\pi = \alpha + s\pi,$$

dwa zaś łuki $\alpha - s\pi$ i $\alpha + s\pi$ według §33 mają równe wstawy i dostawy, toż samo się rozumie o łukach dla $r=\frac{m}{2}-2$ i $\frac{m}{2}+2$ itd. —

Gdy znowu m jest nieparzyste znajdziemy, że dla $r = \frac{m-1}{2}+1 = \frac{m+1}{2}$ łuk z górnym znakiem takaż sama ma wstawę i dostawę, co łuk gdy się bierze

$r = \frac{m-1}{2}$ i znaki dolny i przeciwnie, toż samo rozumie się co do takich $r = \frac{m+3}{2}$, $r = \frac{m-3}{2}$ itd. —

72. We wzorze Moivrea $(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = \cos n(\alpha \mp 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\sin n(\alpha \pm 2r\pi)$ położmy $\alpha = 0$, to znajdziemy $(\cos 0 \pm \sqrt{-1}\sin 0)^n = \cos 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2rn\pi$ czyli gdy $\cos 0 = 1$, a $\sin 0 = 0$, więc

$$(y)\quad (+1)^n = \cos 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2rn\pi,$$

z tegoż samego wzoru dla $\alpha = \pi$, gdy $\cos\pi = -1$ a $\sin\pi = 0$, otrzymujemy

$$(x)\quad (-1)^n = \cos(2r+1)n\pi \pm \sqrt{-1}\sin(2r+1)n\pi.$$

do otrzymanych wzorów stosuje się to wszystko, cośmy w poprzedzającym ustępie o ogólnym wzorze Moivre'a powiedzieli. To jest także $(+1)^n$, jako i $(-1)^n$ otrzymuje tylko jedną wartość, gdy n jest całkowite; gdy znowu także ze wzoru (y) jako (x) wypada m wartości, skoro $n = \frac{s}{m}$, te ostatnie wartości otrzymują się, kładąc w dopiero wspomnionych wzorach porządkiem liczby $0, 1, 2, 3 \ldots \frac{m}{2}$ kiedy m parzyste a $0, 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}$ kiedy m nieparzyste. —

Równanie (x) ze względu równania (o) § 62, w którym tylko $2rn\pi$, za α i $n\pi$ za β położyć należy, daje się także przedstawić

$$(z)\quad (-1)^n = (\cos 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2rn\pi)(\cos n\pi \pm \sqrt{-1}\sin n\pi)$$

a przez wzgląd na równanie (y) wypada jeszcze

$$(u)\quad (-1)^n = (+1)^n(\cos n\pi \pm \sqrt{-1}\sin n\pi)$$

Teraz w równaniu (o) § 62 położywszy $\alpha = 2rn\pi$ i $\beta = n\alpha$

otrzymamy $(\cos 2r n\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2rn\pi)(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha) =$

$= \cos(2rn\pi + n\alpha) \pm \sqrt{-1}\sin(2rn\pi + n\alpha)$, a gdy wzór Moivrea daje $(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = \cos(2rn\pi + n\alpha) \pm \sqrt{-1}\sin(2rn\pi + n\alpha)$

więc jest

$$(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = (\cos 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2rn\pi)(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha)$$

albo gdy pierwszy czynnik drugiej strony namocy równania (y) równa się $(+1)^n$, więc jeszcze

$$(q)\quad (\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = (+1)^n(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha)$$

Z tego wyrażenia, kiedy $n = \frac{s}{m}$, otrzymujemy m rozmaitych wartości przez to, że wartość $\cos\frac{s}{m}\alpha \pm \sqrt{-1}\sin\frac{s}{m}\alpha$ pomnożemy przez m rozmaitych wartości $(+1)^{\frac{s}{m}}$, które znowu ze zrównania (y) otrzymujemy. —

73. W równaniu (q) poprzedzającego ustępu położywszy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wypada, gdy $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

$$(r)\quad (\pm\sqrt{-1})^n = (+1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Ze względu na równanie (m) § 65 mogą być równania (y), (x) i (r) dalsze pod następującą wyrażone postacią

$$(+1)^n = e^{\pm 2rn\pi\sqrt{-1}}$$

$$(-1)^n = e^{\pm(2r+1)n\pi\sqrt{-1}}.$$

$$(\pm\sqrt{-1})^n = e^{\pm 2rn\pi\sqrt{-1}} \times e^{\pm\frac{1}{2}n\pi\sqrt{-1}} = e^{\pm(2r+\frac{1}{2})n\pi\sqrt{-1}}.$$

Dla $n = \sqrt{-1}$ wypada z ostatniego równania

$$(\pm\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2r+\frac{1}{2})\pi}$$

74. Według wzoru Moivre'a mamy

$$\cos n(\alpha \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin n(\alpha \pm 2r\pi) = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n$$

rozwińmy drugą stronę tego równania podług wzoru Newtona i zbierzmy razem części rzetelną i części urojoną dla siebie będzie

$$\cos n(\alpha \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin n(\alpha \pm 2r\pi) =$$

$$= \cos^n\alpha - \left(\tfrac{n}{2}\right)\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \left(\tfrac{n}{4}\right)\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \left(\tfrac{n}{6}\right)\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\left(\tfrac{n}{1}\right)\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \left(\tfrac{n}{3}\right)\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \left(\tfrac{n}{5}\right)\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha \ldots\right\}$$

$$= \cos^n\alpha\left\{1 - \left(\tfrac{n}{2}\right)\mathrm{tg}^2\alpha + \left(\tfrac{n}{4}\right)\mathrm{tg}^4\alpha - \left(\tfrac{n}{6}\right)\mathrm{tg}^6\alpha + \left(\tfrac{n}{8}\right)\mathrm{tg}^8\alpha \ldots\right\} +$$

$$+\sqrt{-1}\cos^n\alpha\left\{\left(\tfrac{n}{1}\right)\mathrm{tg}\,\alpha - \left(\tfrac{n}{3}\right)\mathrm{tg}^3\alpha + \left(\tfrac{n}{5}\right)\mathrm{tg}^5\alpha - \left(\tfrac{n}{7}\right)\mathrm{tg}^7\alpha \ldots\right\}$$

albo zważywszy, że gdy n jest ułamkiem, wtedy otrzymuje się należne wartości $\cos^n\alpha$, przez wymnożenie jednej wartości arytmetycznej przez wszystkie pierwiastki $(+1)^n$ (§72), a zatem, rozumiejąc pod $\cos^n\alpha$ tę jedną arytmetyczną wartość, wypada

$$(h)\qquad \cos n(\alpha \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin n(\alpha \pm 2r\pi) =$$

$$= (+1)^n\cos^n\alpha\left\{1 - \left(\tfrac{n}{2}\right)\mathrm{tg}^2\alpha + \left(\tfrac{n}{4}\right)\mathrm{tg}^4\alpha - \left(\tfrac{n}{6}\right)\mathrm{tg}^6\alpha \ldots\right\}$$

$$+\sqrt{-1}(+1)^n\cos^n\alpha\left\{\left(\tfrac{n}{1}\right)\mathrm{tg}\,\alpha - \left(\tfrac{n}{3}\right)\mathrm{tg}^3\alpha + \left(\tfrac{n}{5}\right)\mathrm{tg}^5\alpha - \left(\tfrac{n}{7}\right)\mathrm{tg}^7\alpha \ldots\right\}$$

$$\left\{\text{od } \alpha = -\tfrac{\pi}{4} \text{ do } \alpha = +\tfrac{\pi}{4}.\right.$$

75. Jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią albo ujemną, wtedy $(+1)^n\cos^n\alpha$ ma tylko jedną i to rzetelną wartość i w takim przypadku, jedna część równania (h) poprzedzającego ustępu

---

Wyrażenie takie jako np. $\left(\tfrac{n}{4}\right)$ znaczy $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, $\left(\tfrac{n}{3}\right)$ znaczy $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, używamy go dla krótkości. —

jest rzetelna, gdy zaś druga jest urojona; a zatem według prawa, że części rzetelne są sobie i urojone także sobie równe, daje się rozebrać na dwa następujące

$$(95)\quad \mathrm{dos}\, n\alpha = \mathrm{dos}^n\alpha \left\{ 1 - \binom{n}{2} \mathrm{sty}^2\alpha + \binom{n}{4} \mathrm{sty}^4\alpha - \binom{n}{6} \mathrm{sty}^6\alpha \ldots \right\}$$

$$= \mathrm{dos}^n\alpha - \frac{n}{2} \mathrm{dos}^{n-2}\alpha\, \mathrm{wst}^2\alpha + \binom{n}{4} \mathrm{dos}^{n-4}\alpha\, \mathrm{wst}^4\alpha - \binom{n}{6} \mathrm{dos}^{n-6}\alpha\, \mathrm{wst}^6\alpha \ldots$$

$$(96)\quad \mathrm{wst}\, n\alpha = \mathrm{dos}^n\alpha \left\{ \binom{n}{1} \mathrm{sty}\,\alpha - \binom{n}{3} \mathrm{sty}^3\alpha + \binom{n}{5} \mathrm{sty}^5\alpha - \binom{n}{7} \mathrm{sty}^7\alpha \ldots \right\}$$

$$= \binom{n}{1} \mathrm{dos}^{n-1}\alpha\, \mathrm{wst}\,\alpha - \binom{n}{3} \mathrm{dos}^{n-3}\alpha\, \mathrm{wst}^3\alpha + \binom{n}{5} \mathrm{dos}^{n-5}\alpha\, \mathrm{wst}^5\alpha - \ldots$$

jeżeli oczywiście drugie równanie uprości się przez $\sqrt{-1}$ i jeszcze uważa na to, że także $\mathrm{dos}\, n(\alpha \pm 2r\pi)$ jako i $\mathrm{wst}\, n(\alpha \pm 2r\pi)$ tylko po jednej wartości mają.

W tym szczególnym przypadku, kiedy n jest (dodatne, obadwa szeregi są skończone a więc wyłamują się z prawideł zbiegania i dlatego α może przybierać jakiekolwiek wartości. Wreszcie i drugi przypadek, w którym n jest ujemne, może być sprowadzony do pierwszego, uważając tylko na to, że $\mathrm{dos} - n = \mathrm{dos}\, n$ i $\mathrm{wst} - n = -\mathrm{wst}\, n$.

76. Jeżeli n jest ułamkiem i np. równym $\frac{s}{m}$ wtedy $(+1)^n = (+1)^{\frac{s}{m}}$ posiada (§72) rozmaitych wartości m, z których te wartości, tylko jedna gdy m jest

nieparzyste; a dwie gdy m jest parzyste, są rzetelne, wszyst-
kie zaś inne są urojone. W takim więc przypadku, równanie
(h) §74. w podobny sposób pierwszemu, dla tych tylko wartości r
daje się rozdzielić, dla których $(+1)^{\frac{r}{m}}$ rzeczywiste wartości otrzy-
muje; to jest dla $r=0$ kiedy m jest nieparzyste, a $r=0$
i $r=\frac{m}{2}$ kiedy m jest parzyste; albowiem dla wszystkich
innych wartości r, obydwie części drugiej strony równania (h)
otrzymują zupełnie inne wartości i każda z nich dla siebie
wypada po części rzetelną po części urojoną.

Położywszy zaś za $(+1)^{\frac{s}{m}}$ jemu równą według (y) §72
następującą wartość $\mathrm{dos}\,\frac{2rs}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wst}\,\frac{2rs}{m}\pi$, wtedy wzór (h)
dla tego przypadku zamieni się w następujący, rzetelniając(?)
jeszcze dla krótkości n za $\frac{s}{m}$

$$\mathrm{dos}\,n(\alpha \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{wst}\,n(\alpha \pm 2r\pi) =$$

$$= \mathrm{dos}\,2rn\pi\,\mathrm{dos}^n\alpha\left\{1-\binom{n}{2}\mathrm{sty}^2\alpha+\binom{n}{4}\mathrm{sty}^4\alpha\ldots\right\} \mp \mathrm{wst}\,2rn\pi\,\mathrm{dos}^n\alpha\left\{\binom{n}{1}\mathrm{sty}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{sty}^3\alpha\ldots\right\}$$

$$\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{wst}\,2rn\pi\,\mathrm{dos}^n\alpha\left\{1-\binom{n}{2}\mathrm{sty}^2\alpha+\binom{n}{4}\mathrm{sty}^4\alpha\ldots\right\}+\sqrt{-1}\,\mathrm{dos}\,2rn\pi.\mathrm{dos}^n\alpha\left\{\binom{n}{1}\mathrm{sty}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{sty}^3\alpha\ldots\right\}$$

z tego zaś otrzymuje się, po ułożeniu rzetelnych i urojonych części
pomiędzy sobą, następujące dwa wzory

$$(97)\quad \mathrm{dos}\,n(\alpha\pm 2r\pi) = \mathrm{dos}^n\alpha\left[\mathrm{dos}\,2rn\pi\left\{1-\binom{n}{2}\mathrm{sty}^2\alpha\ldots\right\}\mp\mathrm{wst}\,2rn\pi\left\{\binom{n}{1}\mathrm{sty}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{sty}^3\alpha\ldots\right\}\right]$$

$$= \mathrm{dos}\,2rn\pi\left[\mathrm{dos}^n\alpha-\binom{n}{2}\mathrm{dos}^{n-2}\alpha\,\mathrm{wst}^2\alpha+\ldots\right]\mp\mathrm{wst}\,2rn\pi\left[\binom{n}{1}\mathrm{dos}^{n-1}\alpha\,\mathrm{wst}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{dos}^{n-3}\alpha\,\mathrm{wst}^3\alpha\ldots\right]$$

$$(98)\quad \mathrm{wst}\,n(\alpha\pm 2r\pi) = \pm\,\mathrm{dos}^n\alpha\left[\mathrm{wst}\,2rn\pi\left\{1-\binom{n}{2}\mathrm{sty}^2\alpha\ldots\right\}\pm\mathrm{dos}\,2rn\pi\left\{\binom{n}{1}\mathrm{sty}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{sty}^3\alpha\ldots\right\}\right]$$

$$= \pm\,\mathrm{wst}\,2rn\pi\left\{\mathrm{dos}^n\alpha-\binom{n}{2}\mathrm{dos}^{n-2}\alpha\,\mathrm{wst}^2\alpha\ldots\right\}+\mathrm{dos}\,2rn\pi\left\{\binom{n}{1}\mathrm{dos}^{n-1}\alpha\,\mathrm{wst}\,\alpha-\binom{n}{3}\mathrm{dos}^{n-3}\alpha\,\mathrm{wst}^3\alpha\ldots\right\}$$

dla $r=0$ kiedy m jest nieparzyste i jeszcze dla $r=\frac{m}{2}$ kiedy m jest parzyste, obadwa te wzory z przyczyny, iż wtedy $\cos\frac{2rs}{m}\pi=\pm1$ a $\sin\frac{2rs}{m}\pi=0$, przechodzą odpowiednio w (95) i (96) jako być powinno. Że wzory $\cos\frac{2rs}{m}=+1$ i $\sin\frac{2rs}{m}=0$, kiedy $r=0$ są prawdziwe same z siebie wypływa, bo wtedy właściwie jest $\cos\frac{2s\times0}{m}\pi=\cos 0=1$, $\sin 0=0$; gdy zaś $r=\frac{m}{2}$ mamy $\cos\frac{2s.\frac{m}{2}}{m}\pi=\cos s\pi=(-1)^s$ (§ 32) i $\sin\frac{2s.m}{2m}\pi=\sin s\pi=0$ (§ 32)

Można także z podwójnych znaków jeden tylko uważać, lecz wtedy dla r należy i ujemne wartości nadawać i pamiętać, że $\cos-\alpha=\cos\alpha$ a $\sin-\alpha=-\sin\alpha$. Gdy zaś wszystkie te wzory od 95 do 98 tylko pomiędzy granicami $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ i $\alpha=+\frac{\pi}{4}$, wyjąwszy kiedy n jest całkowite, zaspokajające wypadki dają; to dla wartości przechodzących powyższe granice, należy położyć $\alpha=y+k\frac{\pi}{4}$ i wtedy dla k, co zawsze zrobione być może, taką liczbę obrać, aby przez to także $y=\alpha-k\frac{\pi}{4}$ pomiędzy też granice $-\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{4}$ przypadł. Gdyby np. było $\alpha=125°$, to dla k wypadłoby 2, gdyż wtedy $y=125-\frac{2\pi}{4}=125°-90°=35°$ oczywiście pomiędzy owe granice $-\frac{\pi}{4}$ i $+\frac{\pi}{4}$ przypada, i gdy dalej $\cos n\alpha=$

$$=\cos(ny+\frac{kn}{4}\pi)=\cos ny\cos\frac{kn}{4}\pi-\sin ny\sin\frac{kn}{4}\pi$$

i $\sin n\alpha=\sin(ny+\frac{kn}{4}\pi)=\sin ny\cos\frac{kn}{4}\pi+\cos ny\sin\frac{kn}{4}\pi$

to z tych

że z tych wyrażeń znajdziemy $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$, wynalazłszy pierwej z owych szeregów $\cos ny$ i $\sin ny$. —

77. Wzory (95) (96) służące dla każdej wartości całkowitej n, które według zrobionej tam uwagi, może zawsze być brane, jako dodatnie, z pewnym ograniczeniem, mogą być jeszcze tako przedstawione, że tylko same sinusy, albo same cosinusy w nich znajdować się będą. Jakoż według (87) mamy,

$2\cos\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, gdy zaś $e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\alpha\sqrt{-1}}}$ więc,

$2\cos\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}} + \frac{1}{e^{\alpha\sqrt{-1}}}$ .... (α) nazwawszy zaś $e^{\alpha\sqrt{-1}} = z$, będzie

$2\cos\alpha = z + \frac{1}{z}$ ... (β) i piszą teraz w równaniu (α) $n\alpha$ za α,

wypada $2\cos n\alpha = e^{n\alpha\sqrt{-1}} + \frac{1}{e^{n\alpha\sqrt{-1}}}$, albo gdy $e^{n\alpha\sqrt{-1}} = (e^{\alpha\sqrt{-1}})^n = z^n$

także $2\cos n\alpha = z^n + \frac{1}{z^n}$ ... (γ)

Połóżmy teraz we wzorze (III przypisy) $a = z$, $b = \frac{1}{z}$, przez co $y = a + b = z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ (według β) i gdy jeszcze $ab = z \times \frac{1}{z} = 1$, to otrzymujemy także $z^n + \frac{1}{z^n} = a^n + b^n = 2\cos n\alpha$, czyli

$$(99)\quad 2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \times$$
$$\times (2\cos\alpha)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}(2\cos\alpha)^{n-8} - \ldots$$

przy czem dla takich wartości n, dla których szereg sam od siebie nie przerywa się, tyle bierze się wyrazów, ile wypada, dopóki się ujemne wykładniki $2\cos\alpha$ nie przedstawią.

Lecz według wzoru (88) mamy znowu $2\sqrt{-1}\sin\alpha = z - \frac{1}{z}$ i $2\sqrt{-1}\sin n\alpha = z^n - \frac{1}{z^n}$ i włożywszy we wzorze wspomnionym (III przypisy) $a = z$ $b = -\frac{1}{z}$, zkąd wypada $y = a + b = z - \frac{1}{z} = 2\sqrt{-1}\sin\alpha$ i $ab = -1$, to otrzymamy, gdy n parzyste

albo nieparzyste być może.

$$z^n \pm \frac{1}{z^n} = (\sqrt{-1})^n (2\,wrt\alpha)^n + n(\sqrt{-1})^{n-2}(2\,wrt\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(\sqrt{-1})^{n-4}(2\,wrt\alpha)^{n-4} + \dots$$

z tych podwójnych znaków bierze się górny, kiedy n jest parzyste, dolny, kiedy n nieparzyste. –

Jeżeli n jest parzyste, ponieważ wtedy $(\sqrt{-1})$ podnosi się do potęg parzystych, więc wydaje potęgi rzeczywiste i równe ± 1 według tego jako n ma postać $4m$ lub $2m$, przeto na mocy równania (γ) mamy

$$(100)\quad 2\,dos\,n\alpha = \pm\left\{(2\,wrt\alpha)^n - n(2\,wrt\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2.}(2\,wrt\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.}(2\,wrt\alpha)^{n-6} \dots\right\}$$

w tym szeregu należy brać znak górny, kiedy $n=4m$; dolny kiedy $n=2m$.

Jeżeli znowu n jest nieparzyste, wtedy, ponieważ $z^n - \frac{1}{z^n} = 2\sqrt{-1}\,wrt\,n\alpha$, obiedwie strony po podstawieniu dadzą się podzielić przez $\sqrt{-1}$, po którem dzieleniu pierwsza strona wypadnie rzeczywista, a na drugiej $\sqrt{-1}$ będzie podnoszony do potęg parzystych, gdyż wykładnik n zmniejszy się o jeden, przez co da potęgi rzeczywiste postaci ± 1 według tego jako $n=4m+1$ lub $2m+1$ i jest.

$$(101.)\quad 2\,wrt\,n\alpha = \pm\left\{(2\,wrt\alpha)^n - n(2\,wrt\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2\,wrt\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.}(2\,wrt\alpha)^{n-6} \dots\right\}$$

znak górny, jak dopiero powiedzieliśmy, bierze się gdy $n=4m+1$, dolny, gdy $n=2m+1$.

78. Przykłady. We wzorach (95), (96) położywszy $n=2,3,4$, wypada

$dos\,2\alpha = dos^2\alpha - wrt^2\alpha$

$dos\,3\alpha = dos^3\alpha - 3dos\alpha\,wrt^2\alpha$

$dos\,4\alpha = dos^4\alpha - 6dos^2\alpha\,wrt^2\alpha + wrt^4\alpha$

$dos\,5\alpha = dos^5\alpha - 20dos^3\alpha\,wrt^2\alpha + 5dos\alpha\,wrt^4\alpha$

$wrt\,2\alpha = 2wrt\alpha\,dos\alpha$

$wrt\,3\alpha = 3dos^2\alpha\,wrt\alpha - wrt^3\alpha$

$wrt\,4\alpha = 4dos^3\alpha\,wrt\alpha - 4dos\alpha\,wrt^3\alpha$

$wrt\,5\alpha = 5dos^4\alpha\,wrt\alpha - 10dos^2\alpha\,wrt^3\alpha + wrt^5\alpha$

we wzorze (99) kładąc $n=2.3.4.5.6$. itd wypada

$dos\,2\alpha = 2dos^2\alpha - 1$

$dos\,3\alpha = 4dos^3\alpha - 3dos\alpha$

$dos\,4\alpha = 8dos^4\alpha - 8dos^2\alpha + 1$

$dos\,5\alpha = 16dos^5\alpha - 20dos^3\alpha + 5dos\alpha$

$dos\,6\alpha = 32dos^6\alpha - 48dos^4\alpha + 18dos^2\alpha - 1.$

Teraz we wzorze (100) położymy $n=2,\ 4,\ 6,\ 8,$ itd gdyż tylko dla takich wartości służy będzie

$$\mathrm{dos}\,2\alpha = -2\,\mathrm{wst}^2\alpha + 1, \qquad \mathrm{dos}\,6\alpha = -32\,\mathrm{wst}^6\alpha + 48\,\mathrm{wst}^4\alpha - 18\,\mathrm{wst}^2\alpha + 1.$$

$$\mathrm{dos}\,4\alpha = 8\,\mathrm{wst}^4\alpha - 8\,\mathrm{wst}^2\alpha + 1; \qquad \mathrm{dos}\,8\alpha = 128\,\mathrm{wst}^8\alpha - 256\,\mathrm{wst}^6\alpha + 160\,\mathrm{wst}^4\alpha - 32\,\mathrm{wst}^2\alpha + 1.$$

nakoniec we wzorze (101) położymy $n=1,\ 3,\ 5,\ 7$ itd wypadnie

$$\mathrm{wst}\,\alpha = \mathrm{wst}\,\alpha \qquad \mathrm{wst}\,5\alpha = 16\,\mathrm{wst}^5\alpha - 20\,\mathrm{wst}^3\alpha + 5\,\mathrm{wst}\,\alpha$$

$$\mathrm{wst}\,3\alpha = -4\,\mathrm{wst}^3\alpha + 3\,\mathrm{wst}\,\alpha, \qquad \mathrm{wst}\,7\alpha = -64\,\mathrm{wst}^7\alpha + 112\,\mathrm{wst}^5\alpha - 112\,\mathrm{wst}^3\alpha + 7\,\mathrm{wst}\,\alpha$$

79. Wzory (99) (100) (101) nie dają najprzód wyrażenia wstawy wielokrotności łuku przez potęgi dostawy, i następnie jeśli dają dostawę wielokrotności łuku przez potęgi wstawy, to tylko w przypadku kiedy n jest parzyste a kiedy jest nieparzyste dają dostawę. Użyjemy więc jeszcze innego sposobu wyprowadzenia podobnych wzorów, mianowicie podobnych, bo dadzą też same wypadki, chociaż potęgi uporządkowane będą według wzrostu. We wzorach (95) i (96) uważajmy najprzód n jako parzyste i ponieważ $\mathrm{dos}\,\alpha = (1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ więc $\mathrm{dos}^n\alpha = (1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n}{2}}$, a zatem podstawiając tę wartość w powyższe wzory, wypadnie

$$\mathrm{dos}\,n\alpha = (1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n}{2}} - \binom{n}{2}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{wst}^2\alpha + \binom{n}{4}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-4}{2}}\mathrm{wst}^4\alpha - \dots \text{ itd}$$

$$\mathrm{wst}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{\binom{n}{1}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{wst}\,\alpha - \binom{n}{3}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-4}{2}}\mathrm{wst}^3\alpha + \binom{n}{5}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-6}{2}}\mathrm{wst}^5\alpha - \dots\right\}$$

Dla wartości znowu nieparzystych n otrzymujemy

$$\mathrm{dos}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-1}{2}} - \binom{n}{2}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{wst}^2\alpha + \binom{n}{4}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-5}{2}}\mathrm{wst}^4\alpha - \dots\right\}$$

$$\mathrm{wst}\,n\alpha = \frac{n}{1}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{wst}\,\alpha - \binom{n}{3}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{wst}^3\alpha + \binom{n}{5}(1-\mathrm{wst}^2\alpha)^{\frac{n-5}{2}}\mathrm{wst}^5\alpha - \dots$$

Rozwijając teraz w tych czterech wzorach, drugie strony a przynajmniej społczynniki w tych drugich stronach, na wielomiany uporządkowane według potęg wznoszących i całkowitych wstawy α, znajdziemy dla n parzystego

$$\mathrm{dos}\,n\alpha = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{wrt}^2\alpha + \frac{n(n-2)}{1.3}\left(\frac{(n-1)(n-3)}{2.4}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\mathrm{wrt}^4\alpha \ldots$$

$$\mathrm{wrt}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{\frac{n}{1}\mathrm{wrt}\,\alpha - \frac{n(n-2)}{1.3}\left(\frac{n-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{wrt}^3\alpha + \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5}\left(\frac{(n-1)(n-3)}{2.4}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\mathrm{wrt}^5\alpha \ldots\right\}$$

Dla wartości zaś n nieparzystego będzie

$$\mathrm{dos}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{1 - \frac{n-1}{1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{wrt}^2\alpha + \frac{(n-1)(n-3)}{1.3}\left(\frac{n(n-2)}{2.4}+\frac{n}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\mathrm{wrt}^4\alpha - \ldots\right\}$$

$$\mathrm{wrt}\,n\alpha = \frac{n}{1}\mathrm{wrt}\,\alpha - \frac{n(n-1)}{1.3}\left(\frac{n-2}{2}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{wrt}^3\alpha + \frac{n(n-1)(n-3)}{1.3.5.}\left(\frac{(n-2)(n-4)}{2.4}+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\mathrm{wrt}^5\alpha - \ldots$$

Jeżeli teraz w przedstawieniu spółczynników w tych wzorach pod postacią prościejszą, i ponieważ spółczynniki każdej potęgi całkowitej $\mathrm{wrt}\,\alpha$ jest summą ułamków, więc na miejsce tej summy (za pomocą wzoru IV przypisów) można podstawić jeden tylko ułamek i będzie

$$(102)\quad \mathrm{dos}\,n\alpha = 1 - \frac{n.n}{1.2}\mathrm{wrt}^2\alpha + \frac{(n+2)n.n(n-2)}{1.2.3.4}\mathrm{wrt}^4\alpha - \frac{(n+4)(n+2)n.n.(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}\mathrm{wrt}^6\alpha$$

$$(103)\quad \mathrm{wrt}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{\frac{n}{1}\mathrm{wrt}\,\alpha - \frac{(n+2)n(n-2)}{1.2.3}\mathrm{wrt}^3\alpha + \frac{(n+4)(n+2)n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.}\mathrm{wrt}^5\alpha \ldots\right\}$$

te dla n parzystego zaś dla n nieparzystego następujące

$$(104)\quad \mathrm{dos}\,n\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left\{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{1.2}\mathrm{wrt}^2\alpha + \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{wrt}^4\alpha \ldots\right\}$$

$$(105)\quad \mathrm{wrt}\,n\alpha = \frac{n}{1}\mathrm{wrt}\,\alpha - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\mathrm{wrt}^3\alpha + \frac{(n+3)(n+1)n(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}\mathrm{wrt}^5\alpha - \ldots$$

~~zepsowane~~ We wzorze (103) położywszy $n=2, 4, 6$, a we wzorze (104) $n=1, 3, 5, 7$ wypada.

$\mathrm{wrt}\,2\alpha = 2\,\mathrm{wrt}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{dos}\,3\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left(1-4\,\mathrm{wrt}^2\alpha\right)$

$\mathrm{wrt}\,4\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left(4\,\mathrm{wrt}\,\alpha - 8\,\mathrm{wrt}^3\alpha\right)$ $\qquad$ $\mathrm{dos}\,5\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left(1-12\,\mathrm{wrt}^2\alpha+16\,\mathrm{wrt}^4\alpha\right)$

$\mathrm{wrt}\,6\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left(6\,\mathrm{wrt}\,\alpha - 32\,\mathrm{wrt}^3\alpha + 32\,\mathrm{wrt}^5\alpha\right)$, $\mathrm{dos}\,7\alpha = \mathrm{dos}\,\alpha\left(1-24\,\mathrm{wrt}^2\alpha+80\,\mathrm{wrt}^4\alpha-64\,\mathrm{wrt}^6\alpha\right)$.

80. Aby teraz wyrazić $\mathrm{wrt}\,n\alpha$ i $\mathrm{dos}\,n\alpha$, kiedy n znaczy liczbę całkowitą, na wielomian uporządkowany według potęg

wznaczych i całkowitych ~~dosα~~ dosα a przynajmniej na iloczyn powstały z wzmnożenia podobnego wielomiana nie przez wrtα; we wzorach (102) (103) (104) (105) po-łóżmy 90-α zamiast α i uważajmy iż wtedy jest

$$\mathrm{dos}\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)=(-)^{\frac{n}{2}}\mathrm{dos}\,n\alpha\,,\quad \mathrm{wrt}\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)=(-1)^{\frac{n}{2}+1}\mathrm{wrt}\,n\alpha \quad (§33)$$

dla wartości parzystych n, a dla nieparzystych

$$\mathrm{dos}\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{wrt}\,n\alpha,\quad \mathrm{wrt}\left(\frac{n\pi}{2}-n\alpha\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{dos}\,n\alpha, \quad (§33)$$

a będzie w przypadku kiedy n jest parzyste

$$(106)\quad (-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{dos}\,n\alpha=1-\frac{nn}{2}\mathrm{dos}^2\alpha+\frac{(n+2)n.n(n-2)}{1.2.3.4}\mathrm{dos}^4\alpha-\frac{(n+4)(n+2)n.n(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5.6}\mathrm{dos}^6\alpha\cdots$$

$$(107)\quad (-1)^{\frac{n}{2}+1}\mathrm{wrt}\,n\alpha=\mathrm{wrt}\alpha\left\{\frac{n}{1}\mathrm{dos}\alpha-\frac{(n+2)n(n-2)}{1.2.3}\mathrm{dos}^3\alpha+\frac{(n+4)(n+2)n.(n-2)(n-4)}{1.2.3.4.5}\mathrm{dos}^5\alpha\cdots\right\}$$

a kiedy n jest nieparzyste wypada

$$(108)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{wrt}\,n\alpha=\mathrm{wrt}\alpha\left\{1-\frac{(n+1)(n-1)}{1.2}\mathrm{dos}^2\alpha+\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{1.2.3.4}\mathrm{dos}^4\alpha-\cdots\right\}$$

$$(109)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{dos}\,n\alpha=\frac{n}{1}\mathrm{dos}\alpha-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\mathrm{dos}^3\alpha+\frac{(n+3)(n+1)n(n-1)(n-3)}{1.2.3.4.5}\mathrm{dos}^5\alpha-\cdots$$

We wzorze (107) połóżmy n = 2, 4, 6. i we wzorze (108) n = 3. 5. 7

wypada.

$\mathrm{wrt}2\alpha=2\mathrm{wrt}\alpha\,\mathrm{dos}\alpha$ $\mathrm{wrt}3\alpha=-\mathrm{wrt}\alpha(1-4\mathrm{dos}^2\alpha)$

$\mathrm{wrt}4\alpha=-\mathrm{wrt}\alpha(4\mathrm{dos}\alpha-8\mathrm{dos}^3\alpha)$ $\mathrm{wrt}5\alpha=\mathrm{wrt}\alpha(1-12\mathrm{dos}^2\alpha+16\mathrm{dos}^4\alpha)$

$\mathrm{wrt}6\alpha=\mathrm{wrt}\alpha(6\mathrm{dos}\alpha-32\mathrm{dos}^3\alpha+32\mathrm{dos}^5\alpha)$ $\mathrm{wrt}7\alpha=-\mathrm{wrt}\alpha(1-24\mathrm{dos}^2\alpha+80\mathrm{dos}^4\alpha-64\mathrm{dos}^6\alpha)$.

87. Można dalsze potęgi całkowite wrtα i dosα wyrazić w funkcyi pierwszego stopnia wrtów i dosów łuków wielokrotnych. α, 2α, 3α itd.

Jeżeli położymy $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha = u$ i $\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha = v$ ..(k)
dodawszy i odjąwszy dwa te równania od siebie
wypada

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\alpha &= u+v \\ 2\sin\alpha\sqrt{-1} &= u-v \end{aligned}\right\} (g)$$

podnieśmy każde z dwóch pierwszych równań do potęgi m otrzymamy

$$u^m = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha \quad \{(r)\ §62\}$$

$$v^m = (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha - \sqrt{-1}\sin m\alpha,$$

z których to znowu równań przez dodawanie i odejmowanie każdego przez podzielenie przez 2 i $2\sqrt{-1}$ otrzymujemy

$$\left.\frac{u^m+v^m}{2} = \cos m\alpha \quad \text{i} \quad \frac{u^m-v^m}{2\sqrt{-1}} = \sin m\alpha \right\} (h)$$

rozmnożywszy zaś przez siebie będzie $u^m v^m = 1$.

teraz pierwszy ze wzorów (g) podnieśmy do potęgi n podług wzoru Newtona i pamiętajmy że wyrazy jednakowo oddalone od środka mają też same spółczynniki nadto że gdy n jest parzyste wtedy jest jeden wyraz środkowy a gdy n nieparzyste wtedy dwa będzie

$$2^n\cos^n\alpha = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 \ldots \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^{n-2} + nuv^{n-1} + v^n$$

albo zbliżając wyrazy podobne ku sobie będzie

$$2^n\cos^n\alpha = u^n+v^n + n.uv(u^{n-2}+v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4}) \ldots \text{ albo}$$

$$2^{n-1}\cos^n\alpha = \frac{u^n+v^n}{2} + \frac{n}{1}uv\left(\frac{u^{n-2}+v^{n-2}}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2\left(\frac{u^{n-4}+v^{n-4}}{2}\right) \ldots$$

albo na mocy równań (h)

(110) $$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\alpha \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}$$

w przypadku kiedy n jest parzyste; jeżeli zaś jest nieparzyste, wtedy zachodzi tylko odmiana w ostatnim wyrazie i jest,

$$(111)\quad 2^{n-1}\,\text{dos}^n\alpha = \text{dos}\,n\alpha + \frac{n}{1}\,\text{dos}(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\text{dos}(n-4)\alpha + \dots\; \frac{n(n-1)\dots\frac{n+1}{2}}{1.2.3.\frac{n-1}{2}}\,\text{dos}\,\alpha.$$

Podnieśmy dalej drugie równanie (g) do potęgi n będzie

$$2^n\,\text{wrt}^n\alpha\,(\sqrt{-1})^n = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}\,u^{n-2}v^2 \dots \pm \frac{n(n-1)}{1.2}\,u^2v^{n-2} \mp nuv^{n-1} \pm v^n$$

według tego jako n jest parzyste albo nieparzyste.

ostatnie równanie daje się jeszcze w następujący napisać sposób,

$$2^n\,\text{wrt}^n\alpha\,(\sqrt{-1})^n = u^n \pm v^n - nuv\,(u^{n-2} \pm v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2.}\,u^2v^2(u^{n-4} \pm v^{n-4})\dots$$

a teraz kiedy n parzyste bierzmy górne znaki i dzielmy przez 2 jest

$$2^{n-1}\,\text{wrt}^n\alpha\,(\sqrt{-1})^n = \frac{u^n+v^n}{2} - nuv\left(\frac{u^{n-2}+v^{n-2}}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})\dots$$

kiedy zaś n nieparzyste wypada brać znaki dolne i dzielmy przez $2\sqrt{-1}$ będzie

$$2^{n-1}\,\text{wrt}^n\alpha\,(\sqrt{-1})^{n-1} = \frac{u^n-v^n}{2\sqrt{-1}} - nuv\left(\frac{u^{n-2}-v^{n-2}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,u^2v^2\left(\frac{u^{n-4}-v^{n-4}}{2\sqrt{-1}}\right)\dots$$

upraszczając zaś za pomocą równań (h) i pamiętając że $(\sqrt{-1})^n = (\sqrt{-1})^{2.\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$, tudzież że $(\sqrt{-1})^{n-1} = (\sqrt{-1})^{2.\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ wypada.

$$(112)\quad (-1)^{\frac{n}{2}}\,2^{n-1}\,\text{wrt}^n\alpha = \text{dos}\,n\alpha - \frac{n}{1}\,\text{dos}(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2.}\,\text{dos}(n-4)\alpha \dots$$
$$\dots \pm \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\dots\frac{n}{2}+1}{1.2.3.\dots\frac{n}{2}} \quad \text{gdy } n \text{ parzyste.}$$

$$(113)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,2^{n-1}\,\text{wrt}^n\alpha = \text{wrt}\,n\alpha - \frac{n}{1}\,\text{wrt}(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\text{wrt}(n-4)\alpha \dots$$
$$\dots \pm \frac{n(n-1)\dots\frac{n+1}{2}}{1.2.3.\dots\frac{n-1}{2}}\,\text{wrt}\,\alpha$$

82. Jeśli we wzorze (110) położymy $n = 2, 4, 6$ a w (111) $n = 1.3.5$ wypada

$2\,\text{dos}^2\alpha = \text{dos}\,2\alpha + 1$

$8\,\text{dos}^4\alpha = \text{dos}\,4\alpha + 4\,\text{dos}\,2\alpha + 3.$

$32\,\text{dos}^6\alpha = \text{dos}\,6\alpha + 6\,\text{dos}\,4\alpha + 15\,\text{dos}\,2\alpha + 10.$

$\text{dos}\,\alpha = \text{dos}\,\alpha$

$4\,\text{dos}^3\alpha = \text{dos}\,3\alpha + 3\,\text{dos}\,\alpha$

$16\,\text{dos}^5\alpha = \text{dos}\,5\alpha + 5\,\text{dos}\,3\alpha + 10\,\text{dos}\,\alpha$

nakoniec we wzorze (112) położymy $n = 2, 4, 6$, a w (113) $n = 1, 3, 5$.

$-2\,\text{wrt}^2\alpha = \text{dos}\,2\alpha - 1$

$8\,\text{wrt}^4\alpha = \text{dos}\,4\alpha - 4\,\text{dos}\,2\alpha + 3.$

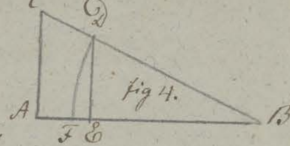
$-32\,\text{dos}^6\alpha = \text{dos}\,6\alpha - 6\,\text{dos}\,4\alpha + 15\,\text{dos}\,2\alpha - 10$

$\text{wrt}\,\alpha = \text{wrt}\,\alpha$

$-4\,\text{wrt}^3\alpha = \text{wrt}\,3\alpha - 3\,\text{wrt}\,\alpha$

$16\,\text{wrt}^5\alpha = \text{wrt}\,5\alpha - 5\,\text{wrt}\,3\alpha + 10\,\text{wrt}\,\alpha.$

IV

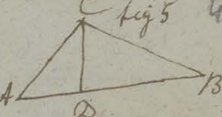


83. W trójkącie prostokątnym ABC, naznaczywszy boki przeciwne kątom przez a, b, c i z wierzchołka kąta B promieniem równym jedności, nakreśliwszy łuk DF, nadto spuściwszy prostopadłą DE, będzie ona wstawą kąta B, gdy znowu EB będzie jego dostawą. Że zaś dwa trójkąty ABC i BED są podobne, więc DB : DE = BC : AC i DB : BE = BC : AB; albo podstawiwszy wartości jest: 1 : wst B = a : b i 1 : dos B = a : c, zkąd wypada, iż wst B = $\frac{b}{a}$ i dos B = $\frac{c}{a}$ to jest, że w trójkącie prostokątnym, wstawa kąta ostrego równa się bokowi przeciwnemu podzielonemu przez przeciwprostokątną, a dostawa tegoż kąta, równa się bokowi przyległemu podzielonemu przez przeciwprostokątną.

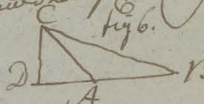
84. Zniósłszy mianowniki w dwóch ostatnich równaniach, wypada b = a.wst B i c = a.dost B to jest, że w trójkącie prostokątnym, bok przeciwny kątowi ostremu równa się przeciwprostokątnej rozmnożonej przez wstawę tegoż kąta, a bok przyległy równa się przeciwprostokątnej rozmnożonej przez dostawę.

85. Podzieliwszy dwa równania ustępu poprzedzającego przez siebie otrzymujemy $\frac{a.\text{wst}B}{a.\text{dos}B} = \frac{b}{c}$, czyli sty B = $\frac{b}{c}$, to jest: styczna kąta ostrego w trójkącie prostokątnym równa się bokowi przeciwnemu podzielonemu przez bok przyległy.

Zniósłszy mianownik w ostatnim równaniu wypada b = c.sty B to jest że w trójkącie prostokątnym bok przeciwny kątowi ostremu równa się także bokowi przyległemu rozmnożonemu przez styczną tegoż kąta.



86. W trójkącie prostokreślnym ABC, nazwijmy trzy kąty trójkąta przez A. B. C. a trzy boki przeciwległe tym kątom przez a. b. c i spuśćmy prostopadłą CD. Według § 84 mamy CD = b wst A i znowu CD = a wst B, słowo więc pierwsze strony są sobie równe, więc i drugie równe być muszą i jest b wst A = a. wst B albo $\frac{wst A}{a} = \frac{wst B}{b}$ to jest wstawy kątów w trójkącie prostokreślnym mają się do siebie jako boki przeciwne tym kątom. Też samo twierdzenie sprawdza się, kiedy trójkąt jest rozwartokątny – bo z trójkąta DAC mamy DC = b. wst DAC, lecz kąt DAC = 180° – A więc wst DAC = wst(180° – A) = wst A (34) i jest DC = b. wst A, z trójkąta znowu CDB jest CD = a wst B, więc b wst A = a wst B czyli $\frac{wst A}{a} = \frac{wst B}{b}$. i w ogólności w trójkącie prostokreślnym jest.



114) $\frac{wst A}{a} = \frac{wst B}{b} = \frac{wst C}{c}$.

87. Oznaczmy trzy kąty przez A. B. C, i we wzorze 3 (§ 41 A) przełóżmy A+B za a i C za b otrzymamy

$dos(A+B+C) + dos(A+B-C) = 2 dos(A+B) dos C$, połóżmy dalej w tymże samym wzorze C za a i B−A za b wypadnie

$dos(C+B-A) + dos(C-B+A) = 2 dos C dos(B-A)$, dodawszy dwa te otrzymane wzory do siebie, otrzymujemy

$dos(A+B+C) + dos(A+B-C) + dos(C+B-A) + dos(C-B+A) = 2 dos C dos(A+B) + 2 dos C dos(B-A)$

$= 2 dos C \{dos(A+B) + dos(B-A)\}$

albo na mocy tegoż samego wzoru trzeciego (z A § 41) jest

(115) $dos(A+B+C) + dos(B+C-A) + dos(A+C-B) + dos(A+B-C) = 4 dos A dos B dos C$

88. Niechaj teraz będzie $A+B+C = \pi$ i gdy wzór (115) jest udowodniony dla jakichkolwiek kątów, więc też ma miejsce i w tym razie, kiedy położymy w nim $\frac{1}{2}A$. $\frac{1}{2}B$. $\frac{1}{2}C$ za A. B. C, co uskuteczniwszy

otrzymujemy

$$\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)+\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)+\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)+\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)=$$
$$=4\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A.\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B.\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C,$$

jeżeli zaś podamy summę kątów, jak założyliśmy równą $180°$ czyli π to jest $A+B+C=\pi$, wtedy mamy $\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\tfrac{1}{2}\pi=90°$ $\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\tfrac{1}{2}\pi-C$, $\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\tfrac{1}{2}\pi-A$, $\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\tfrac{1}{2}\pi-B$, przez co wzór ostatni, gdy $\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\mathrm{dos}\,90=0$ i $\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\mathrm{dos}(\tfrac{1}{2}\pi-A)=$ $=\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A$ itd., przechodzi w następujący

(116) $\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C=4\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C$ gdy $A+B+C=\pi$

89. Użyjmy teraz w ostatnim wzorze $180-A$ za A, $180-B$ za B i $-C$ za C, co zrobione być może, gdyż summa ~~tak dobranych kątów to jest $180-A+180-B-C$ jest równa~~ równa π, jak samo dodawanie pokazuje takich kątów włożona w równanie $A+B+C=\pi$ daje ~~180~~

$$\pi-A+\pi-B-C=\pi \text{ czyli } A+B+C=\pi$$ to jest czyni

zadość warunkowi, będzie

$$\mathrm{wst}(180°-A)+\mathrm{wst}(180°-B)+\mathrm{wst}-C=4\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(180°-A)\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}(180-B)\,\mathrm{dos}-\tfrac{1}{2}C$$

albo

(α) $\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C=4\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A.\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C$, podobnym sposobem, iż znajdziemy

(β) $\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}B=4\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B$

(γ) $\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}A=4\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}A.$

Mnożmy teraz wzór (116) przez wzór (γ) otrzymamy

$$(\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C)(\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}A)=16\,\mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C$$

lecz wiemy że $\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}\mathrm{wst}B$ (24) i $\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C\,\mathrm{dos}\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}\mathrm{wst}C$

czyli jest $$\mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C)(\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C-\mathrm{wst}A)}{4\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C} \quad (Z)$$

Mnożmy dalej wzory (α) i (β) przez siebie, wypadnie

$$(\text{wst}A + \text{wst}B - \text{wst}C)(\text{wst}A + \text{wst}C - \text{wst}B) = 16\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}\tfrac{1}{2}B\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C\,\text{dos}\tfrac{1}{2}C$$

albo

$$(\text{wst}A + \text{wst}B - \text{wst}C)(\text{wst}A + \text{wst}C - \text{wst}B) = 16\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{wst}B\,\text{wst}C}{4}$$ albo

$$(x)\quad \text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(\text{wst}A + \text{wst}B - \text{wst}C)(\text{wst}A + \text{wst}C - \text{wst}B)}{4\,\text{wst}B\,\text{wst}C}$$

Lecz do wzoru (114) stosując twierdzenie, iż summa poprzedników ma się do summy następników, jako poprzednik do swojego następnika, mamy $\frac{\text{wst}A + \text{wst}B + \text{wst}C}{a+b+c} = \frac{\text{wst}B}{b}$ zkąd $\frac{\text{wst}A + \text{wst}B + \text{wst}C}{\text{wst}B} = \frac{a+b+c}{b}$ i gdy także różnica poprzedników do różnicy następników, jako poprzedniki do swoich następników, więc $\frac{\text{wst}C - \text{wst}A}{c-a} = \frac{\text{wst}B}{b}$; a teraz summa poprzedników itd. więc $\frac{\text{wst}B + \text{wst}C - \text{wst}A}{b+c-a} = \frac{\text{wst}B}{b}$ lub $\frac{\text{wst}C}{c}$, zkąd wypada $\frac{\text{wst}B + \text{wst}C - \text{wst}A}{\text{wst}C} = \frac{b+c-a}{c}$; podobnym okażemy sposobem, iż $\frac{\text{wst}A + \text{wst}B - \text{wst}C}{\text{wst}B} = \frac{a+b-c}{b}$ i $\frac{\text{wst}A + \text{wst}C - \text{wst}B}{\text{wst}C} = \frac{a+c-b}{c}$; które to wartości podstawiwszy w równania (2) i (x) otrzymujemy

$$(117)\quad \text{dos}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$$

$$(118)\quad \text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{(c+a-b)(a+b-c)}{4bc}.$$

Każdy z tych wzorów daje się jeszcze przerobić, skoro się założy $a+b+c=2p$, zkąd $a+b-c=2(p-c)$,

$a+c-b = 2(p-b)$ i $b+c-a = 2(p-a)$ w następujące wzory po wyciągnieniu pierwiastka kwadratowego

$$(119)\quad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$(120)\quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

90. We wzorze (25) połóżmy zamiast $\cos^2 a$ i $\sin^2 a$ wartości wynalezione na $\cos^2\frac{1}{2}A$ (117) i $\sin^2\frac{1}{2}A$ (118) a znajdziemy Cosinus łuku czyli kąta dwa razy większego to jest A i będzie

$$\cos A = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} - \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc} =$$

$$= \frac{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}}{4bc} - \frac{\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}{4bc} =$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2-\{a^2-(b-c)^2\}}{4bc} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2-(a^2-b^2+2bc-c^2)}{4bc}$$

$$= \frac{b^2+c^2+2bc-a^2-a^2+b^2-2bc+c^2}{4bc} = \frac{2b^2+2c^2-2a^2}{4bc}$$

czyli ostatecznie

$$(121)\quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

91. Wybierając wzór na Cosinus kąta C w trójkącie prostokreślnym, podobny do wzoru (121) — po zniesieniu mianowników wypada

$$2bc\cos A = b^2+c^2-a^2$$

$$2ab\cos C = a^2+b^2-c^2$$ po których dodaniu wypada znowu $2bc\cos A + 2ab\cos C = 2b^2$ a dzieląc przez $2b$ jest

$$(122)\quad b = c\cos A + a\cos C$$

92. Na podobieństwo wzoru (122) mamy także $a = c\cos B + b\cos C$ Dodawszy zaś dwa ostatnie wzory wypadnie

$a+b = c(\cos A + \cos B) + (a+b)\cos C$; albo przeniósłszy ~~dox~~ $(a+b)\cos C$ na pierwszą stronę równania, wypada

$$(a+b)(1-\cos C) = c(\cos A + \cos B),$$

lecz $1-\cos C = 2\sin^2\frac{1}{2}C$ (57), dalej $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$ (56),

więc ~~[illegible]~~ $2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C = 2c\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$, a gdy nadto w trójkącie prostokreślnym $A+B+C=180°$ i $\frac{1}{2}(A+B) = 90-\frac{1}{2}C$, więc $\sin\frac{1}{2}(A+B) = \cos\frac{1}{2}C$ i $\cos\frac{1}{2}(A+B) = \sin\frac{1}{2}C$. co podstawiwszy będzie

$$2(a+b)\sin^2\tfrac{1}{2}C = 2c\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}(A-B),$$ albo ostatecznie

$$(123)\quad \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a+b}{c}\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Też same wzory, któreśmy dodawali, starajmy się odjąć od siebie otrzymamy, $a-b = c(\cos B - \cos A) - (a-b)\cos C$, przeniósłszy ostatni wyraz drugiej strony na pierwszą wypada

$$(a-b)(1+\cos C) = c(\cos B - \cos A),$$ albo upraszczając za pomocą wzorów (56 i 67) otrzymujemy,

$$2(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C = 2c\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$ a gdy, jak dopiero okazaliśmy $\cos\frac{1}{2}C = \sin\frac{1}{2}(A+B)$, więc

$$2(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C = 2c\cos\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(A-B),$$ dzieląc zaś przez $2\cos\frac{1}{2}C$ wypada ostatecznie

$$(124)\quad \sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{c}\cos\tfrac{1}{2}C$$ ^

93. We wzorach (123) (124) zmieńmy mianowniki i napiszmy $\sin\frac{1}{2}(A+B)$ za $\cos\frac{1}{2}C$, tudzież $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ za $\sin\frac{1}{2}C$ będzie,

---

^ Wzory (123 i 124) są też same, o których pisałem w Programmie Instytutu Technicznego Krakowskiego z r. 1842.

$c \cos\frac{1}{2}(A-B) = (a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)$ i $c \sin\frac{1}{2}(A-B) = (a-b)\sin\frac{1}{2}(A+B)$, podzieliwszy równanie drugie przez pierwsze wypada

$$\frac{c \sin\frac{1}{2}(A-B)}{c \cos\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a-b)\sin\frac{1}{2}(A+B)}{(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}\text{, albo}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) \text{ zkąd wypada}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b} \text{ albo nakoniec}$$

$$(125)\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}$$

94. Zastanówmy się teraz nad sposobem rozwiązania trójkątów prostokreślnych, to jest jako dają się wynaleźć trzy rzeczy trójkąta przez rachunek, skoro trzy inne są dane. Uważajmy najprzód trójkąty prostokreślne prostokątne, w których dosyć jest mieć dane dwie rzeczy, albowiem jeden kąt jako prosty jest zawsze wiadomy. —

Nazwijmy boki trójkąta prostokreślnego fig 4 przez a, b, c i dajmy że są wiadome przeciwprostokątna a i bok b, mamy wynaleźć kąty B, C, bok c i powierzchnię.

Dla wynalezienia boku c mamy $c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ więc $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ i znowu $\log c = \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b)$

Niech $a = 567$. $b = 423,5$ będzie

$$\log(a+b) = \log 990,5 = 2,9958545$$
$$\log(a-b) = \log 143,5 = 2,1568519$$
$$\overline{ 5,1527064}$$

$$\tfrac{1}{2}\log(a+b) + \tfrac{1}{2}\log(a-b) = \frac{5,1527064}{2} = 2,5763532 = \log 377,01.$$

to jest, że $c = 377,01.$

Aby wynaleźć kąt B mamy (§ 83) $\text{sin} B = \frac{b}{a}$ a przywracając promień według (§ 58) jest $\text{sin} B = \frac{R.b}{a}$ a tem samem

$\log \text{sin} B = \log R + \log b + \text{dop. aryt.} \log a.$

~~Lixx~~ więc $\log R = 10,0000000.$

$\log b = \log 423,5 = 2,6268534$

$\text{Dopar.} \log a = \text{d.} \log 567 = 7,2464169.$

$\log \text{sin} B = ~~1~~9,8732703 = \log \text{sin} (48°,19'25'')$

to jest że $B = 48° 19' 25''$

a że $B + C = 90°$ więc $C = 90° - 48° 19' 25'' = 41°, 40'. 35''$

Co się tycze powierzchni ta daje się wynaleźć w ten sposób,

~~$\Delta = \frac{1}{2} bc$ a że $c = a \cos B$ (§ 84) więc $\Delta = \frac{1}{2} ab \cos B$ [illegible] wracając zaś promień będzie $\Delta = \frac{ab. \cos B}{2R}$.~~

$\Delta = \frac{1}{2} bc$ a że $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ więc $\Delta = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}$

$\log \Delta = \log b + \frac{1}{2} \log (a+b) + \frac{1}{2} \log (a-b) + \text{d.a.} \log 2.$

$\log b = \log 423,5 = 2,6268534.$

$\frac{1}{2} \log (a+b) = 1,4979272$

$\frac{1}{2} \log (a-b) = 1,0784259.$

$\text{d.a.} \log 2 = 9,6989700$

$\log \Delta = ~~1~~4,9021765 = \log 79831,9.$

$\therefore \Delta = 79831,9.$

95\. Dane są boki b. c. wynaleźć kąty B. C. przeciwprostokątną a . powierzchnię A.

Dla wynalezienia kąta B mamy $\text{tg} B = \frac{b}{c}$ (§ 85) a przywracając promień będzie $\text{tg} B = \frac{R.b}{c}$ zkąd

$\log \text{tg} B = \log R + \log b + \text{d.a.} \log c$

Niech $b = 567.$ $c = 389.4.$ będzie

$$\log R = 10{,}0000000$$
$$\log b = \log 567 = 2{,}7535831.$$
$$\text{D.a.} \log c = \text{d.a.}\log 389.4 = 7{,}4096041$$
$$\log \text{stg} B = 10{,}1631872 = \log \text{stg}(55^\circ 31' 11'')$$

to jest że $B = 55^\circ 31' 11''$ a $C = 90 - B = 34^\circ 28' 49''$

aby wynaleźć a mamy $a^2 = b^2 + c^2$ więc $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, lecz gdy ten wzór nie jest wygodny do działania z logarytmami, dlatego możemy wziąć kąta B lub C już wynalezionego i będzie, gdy $\text{wst} B = \frac{R.b}{a}$ więc $a = \frac{R.b}{\text{wst} B}$ zkąd $\log a = \log R + \log b + \text{d.a.} \log \text{wst} B.$

$$\log R = 10{,}0000000$$
$$\log 567 = 2{,}7535831.$$
$$\text{D.a.} \log \text{wst} B = 0{,}0839036$$
$$\log a = 2{,}8374867 = \log 687.839$$

więc $a = 687{,}839.$

Dla wynalezienia powierzchni jest $\Delta = \frac{1}{2} b.c$

96. Dana jest przeciwprostokątna i kąt B, mamy wynaleźć kąt C, i dwa boki i powierzchnię.

Znajdziemy kąt C ze zrównania $C = 90 - B$, niech $B = 67^\circ 12' 13''$ będzie kąt $C = 22^\circ 47' 47''$

Znajdziemy bok b według (§ 84) $b = a\,\text{wst} B$, według tegoż ustępu jest $c = a \cos B$; przywracając promień wypada $b = \frac{a\,\text{wst} B}{R}$, $c = \frac{a \cos B}{R}$ więc

$$\log b = \log a + \log \text{wst} B + \text{d.a.} \log R$$
$$\log c = \log a + \log \cos B + \text{d.a.} \log R.$$

Niech $a = 789$. będzie

$$\log a = \log 789 = 2,8970770$$
$$\log \text{wst}(67°12'13'') = 9,9646780$$
$$\text{D. a.} \log R = 0,0000000$$
$$\log b = 2,8617550 = \log 727,37$$

to jest że $b = 727,37$

$$\log a = \log 789 = 2,8970770$$
$$\log \text{dos}(67°12'13'') = 9,5882241$$
$$\text{D. a.} \log R = 0,0000000$$
$$\log c = 2,4853011 = \log 305,7$$

to jest że $c = 305,7$.

Dla wynalezienia powierzchni w funkcyi danych należy we wzorze na powierzchnię $A = \frac{1}{2}bc$ zamiast b i c podstawić wartości dopiero otrzymane będzie

$$A = \frac{1}{2}\frac{a \,\text{wst} B}{R} \times \frac{a \,\text{dost} B}{R} = \frac{a^2 \,\text{wst} B \,\text{dost} B}{2R^2}$$

lecz według wzoru (24) jest $\text{wst} B \,\text{dost} B = \frac{1}{2}\text{wst} 2B$ a we przywracając pro,, mień jest $\frac{\text{wst} B \,\text{dost} B}{R} = \frac{1}{2}\text{wst} 2B$, co podstawiwszy w wy,, rażenie na A będzie $A = \frac{\frac{1}{2}a^2 \,\text{wst} 2B}{2R} = \frac{a^2 \,\text{wst} 2B}{4R}$ stąd

$$\log A = 2\log a + \log \text{wst} 2B + \text{dop. ar.} \log 4 + \text{dop. ar.} \log R$$

$$2\log a = 2\log 789 = 5,7941540$$
$$\log \text{wst} 2B = 9,8539320 = \log \text{wst}(45°35'34'')$$
$$\text{D. a.} \log 4 = 9,3979400$$
$$\log A = 5,0460260 = \log 111179$$

to jest że $A = 111179$.

97. Dany jest bok b i kąt B wynaleźć kąt C, przeciwprostokątną, bok c i powierzchnię.

Kąt C znajduje się przez odjęcie od 90° kąta B, więc

$C = 90 - B$. Niech będzie $B = 56°25'13''$ i $b = 425$.

jest $C = 90 - (56°25'13'') = 33°34'47''$

Znajdziemy bok c według (§85) mamy bowiem $b = c\,\text{stg}\,B$ a zatem $c = \frac{R.b}{\text{stg}B}$. i $\log c = \log R + \log b + \text{d.a.}\log \text{stg}B$.

$$\begin{aligned}\log R &= 10,0000000\\ \log b = \log 425 &= 2,6283889.\\ \text{d.a.}\log\text{stg}B &= 9,8220951\\ \hline \log c &= 22,4504840 = \log 282,15\end{aligned}$$

więc $c = 282,15$.

Ponieważ $b = a\,\text{wst}B$ (§84) więc $a = \frac{R.b}{\text{wst}B}$ a tem samem

$$\log a = \log R + \log b + \text{d.a.}\log\text{wst}B.$$

$$\begin{aligned}\log R &= 10,0000000\\ \log b = \log 425 &= 2,6283889.\\ \text{d.a.}\log\text{wst}B &= 0,2571165\\ \hline \log a &= 2,8855054 = \log 768,25\end{aligned}$$

Zkąd jest że $a = 768,25$.

Dla znalezienia powierzchni mamy $\Delta = \frac{1}{2}b.c$ a że $c = \frac{Rb}{\text{stg}B}$ więc $\Delta = \frac{Rb^2}{2\,\text{stg}B}$. i $\log\Delta = \log R + 2\log b + \text{d.a.}\log 2 + \text{d.a.}\log\text{stg}B$.

$$\begin{aligned}\log R &= 10,0000000\\ 2\log b &= 5,2567678\\ \text{d.a.}\log 2 &= 9,6989700\\ \text{d.a.}\log\text{stg}B &= 9,8220951.\\ \hline \log\Delta &= 34,7778329 = \log 59956.\end{aligned}$$

Zkąd jest że $\Delta = 59956$.

98. Przejdziemy teraz do rozwiązania trójkątów ukośnokątnych, (fig 5: 6) w których trzy kąty nazwiemy przez A. B. C. a boki tym kątom przeciwne przez a. b. c. Niech będą dwa kąty A. B i bok a, mamy wynaleźć kąt C, boki b. c. i powierzchnię A.

Dla wynalezienia kąta C jest $C = 180° - (A+B)$ · jeżeli $A = 36° 15'$; $B = 72° 18' 13''$ to $C = 180° - (108° 33' 13'') = 71° 26' 47''$

Znajdziemy bok b ze zrównania (114) $\frac{wst A}{a} = \frac{wst B}{b}$, bo jest $b = \frac{a\, wst B}{wst A}$, skąd $\log b = \log a + \log wst B +$ d.a. $\log wst A$.

niech $a = 453,5$ jest,

$\log a = \log 453,5 = 2,6565773$

$\log wst (72° 18' 13'') = 9,9789473$

d.a. $\log wst (36° 15') = 0,2281850$

$\log b = 2,8637096 = \log 730,65$.

to jest, że $b = 730,65$.

Znajdziemy bok c ze zrównania $\frac{wst A}{a} = \frac{wst C}{c}$, skąd $c = \frac{a\, wst C}{wst A}$, więc $\log c = \log a + \log wst C +$ d.a. $\log wst A$.

$\log a = \log 453,5 = 2,6565773$

$\log wst (71° 26' 47'') = 9,9768204$

d.a. $\log wst (36° 15') = 0,2281850$

$\log c = 2,8615827 = \log 727,08$

to jest, że $c = 727,08$.

Powierzchnia trójkąta ABC (fig 5. 6.) jest $\Delta = \frac{1}{2} c \times CD$, a gdy $CD = a\, wst B$ (§ 86) więc $\Delta = \frac{1}{2} ac\, wst B$ to jest, powierzchnia trójkąta ukośnokątnego, równa się połowie iloczynu dwóch boków przyległych przez wstawę kąta zawartego.

Należy teraz za c jako niewiadome podstawić jego wartość, będzie

$\Delta = \frac{1}{2} a\, wst B \times \frac{a\, wst C}{wst A} = \frac{a^2\, wst B\, wst C}{2\, wst A}$ a przyjmując promień wypadnie

$\Delta = \frac{a^2\, wst B\, wst C}{2\, wst A}$

$2 \log a = 5,3131546$

$\log wst B = 9,9789473$.

$\log wst C = 9,9768204$.

d.a. $\log 2 = 9,6989700$

d.a. $\log wst A = 0,2281850$

$\log \Delta = 5,1960773 = \log 157167$ to jest że $\Delta = 157167$ —

99. Dane są dwa boki a, b, gdzie $b > a$ i kąt B przeciwny większemu bokowi, mamy wynaleźć kąty A, C, bok c i powierzchnią.

Niech $a = 453.5$. $b = 730,65$ $B = 72°18'13''$

Znajdziemy kąt A ze zrównania $\frac{\text{wst} A}{a} = \frac{\text{wst} B}{b}$, bo jest $\text{wst} A = \frac{a \,\text{wst} B}{b}$, zkąd $\log \text{wst} A = \log a + \log \text{wst} B + \text{d.a.} \log b$.

$$\log a = \log 453.5 = 2,6565773.$$
$$\log \text{wst}(72°18'13'') = 9,9789473$$
$$\text{Od.a.} \log b \quad = 7,1362906$$
$$\log \text{wst} A = 9,7718152 = \log \text{wst}(36°15')$$

Co jest że $A = 36°15'$

Trzeci kąt C otrzymuje się ze zrównania $C = 180° - (A+B) =$
$$= 180° - (108°33'13'') = 71°26'47''$$

Znajdziemy bok c ze zrównania $\frac{\text{wst} A}{a} = \frac{\text{wst} C}{c}$, albo ze zrównań (123 i 124), które dają $c = \frac{(a+b)\,\text{wst}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$ i $c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}$; z pierwszego jest $\log c = \log a + \log \text{wst} C - \log \text{wst} A$

$$\log a = \log 453.5 = 2,6565773$$
$$\log \text{wst}(71°26'47'') = 9,9768204$$
$$\text{Od.a.} \log \text{wst}(36°15') = 0,2281850$$
$$\log c \quad = 2,8615827 = \log 727,08$$

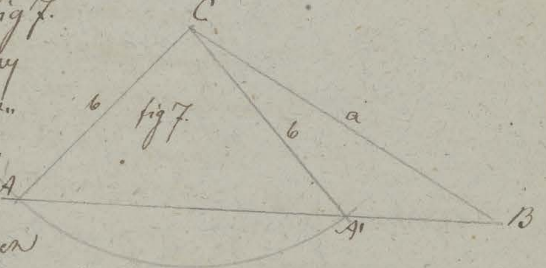
więc $c = 727,08$.

Dla wynalezienia powierzchni według poprzedzającego ustępu mamy $\Delta = \frac{1}{2} ab \,\text{wst} C$ a przywodząc promień jest $\Delta = \frac{a.b.\text{wst} C}{2R}$.

$$\log a = 2,6565773.$$
$$\log b = 2,8637096.$$
$$\log \text{wst} C = 9,9768204.$$
$$\text{Od.a.} \log 2 = 9,6989700$$
$$\log \Delta = 5,1960773 = \log 157167$$

Co jest, że $\Delta = 157167$.

Uwaga W tym przypadku, gdy dane są dwa boki i kąt przeci-
wny jednemu, po wynalezieniu kąta przeciwnego drugiemu bo-
kowi, wtedy tylko on jest pewny i niewątpliwy, kiedy kąt dany
stoi naprzeciwko boku większego; albowiem gdy wynaleziona
wstawa odpowiada dwum łukom czyli kątom, jednemu np. B dru-
giemu 180-B, to skoro a>b musi być także kąt A>B, a więc
wziąwszy kąt odpowiadający wstawie wynalezionej mniejszy od
A, wypadnie on pewny i niewątpliwy. Zupełnie rzecz się ma
przeciwnie, skoro kąt dany nie stoi naprzeciwko większego boku,
lecz naprzeciw mniejszego, bo wtedy obadwa kąty odpowiadają-
ce wynalezionej wstawie, będą większe od danego kąta i
obadwa przeciwne będą większemu bokowi danemu. Lecz
też właśnie w przypadku, który uważamy, dwa trójkąty
z danych trzech rzeczy wykreślić a zatem i obrachować się
dają, jako to uzmysłowia fig 7.



gdzie, gdy dany jest kąt B, stojący
naprzeciw mniejszego boku b da-
nego i dany boku a>b, wypada-
ją dwa trójkąty przez wy-
kreślenie ABC, A'BC, w których
dane trzy rzeczy się znajdują, to jest kąt B, dwa boki a i b. Jednak
i ta wątpliwość znika, gdy ze wzoru na obrachowanie wst A
wypada wst $A = \frac{a \text{ wst } B}{b} = 1$. bo wtedy $A = 90°$ jeden tylko da-
je trójkąt — Wreszcie i to zdarzyć się może, iż wypadnie
wst $A = \frac{a \text{ wst } B}{b} > 1$, co być niemoże, a wtedy z trzech danych
rzeczy, trójkąt wykreślić się nie da i jest niepodobny. —

100. Dane są dwa boki a. b. i kąt zawarty C; potrzeba wynaleźć obydwa kąty A. B, bok c i powierzchnię.

Niech $a = 689.5$. $b = 327$. kąt $C = 38°18'$

Znajdziemy kąty A. B. jeżeli jeszcze wynajdziemy połowę różnicy obydwóch tych kątów, których już mamy wiadomą połowę summy; gdyż $A+B = 180° - C = 180° - (38°18') = 141°42'$, więc $\frac{1}{2}(A+B) = 70°51'$; albowiem do połowy summy dodawszy połowę różnicy wypadnie kąt większy A, a od połowy summy odjąwszy połowę różnicy wypadnie kąt mniejszy B, gdyż jest $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B+A-B}{2} = \frac{2A}{2} = A$ i

$$\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = \frac{A+B-A+B}{2} = \frac{2B}{2} = B.$$

Idzie więc tylko o wynalezienie kąta $\frac{1}{2}(A-B)$ do czego służy wzór (125) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}$, z którego

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{(a+b)}$$

$$\begin{aligned}
\log(a-b) = \log 362{,}5 &= 2{,}5593080 \\
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B) &= 10{,}4593469 \\
\text{d.a.}\log(a+b) &= 6{,}9928926 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) &= 10{,}0115475 = \log\operatorname{tg}(45°45'42'')
\end{aligned}$$

Gdy jest, że $\frac{1}{2}(A-B) = 45°45'42''$

a zatem $A = 70°51' + 45°45'42'' = 116°36'42''$

$B = 70°51' - (45°45'42'') = 25°5'18''$

Mając zaś teraz wiadome wszystkie kąty znajdziemy bok c ze zrównania $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ lub ze zrównań (123, 124).

Weźmy równanie (124) wypada

$$\log c = \log(a-b) + \log\cos\tfrac{1}{2}C + \text{d.a.}\log\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\log(a-b) = \log 362{,}5 = 2{,}5593080$$
$$\log \text{dos}\tfrac{1}{2}C = \log \text{wst}\tfrac{1}{2}(A+B) = 9{,}9752769$$
$$\text{D. a.} \log \text{wst}\tfrac{1}{2}(A-B) = 0{,}1448173$$
$$\log c = 2{,}6793922 = \log 477{,}96$$

to jest $c = 477{,}96$.

Niekiedy jednakże wynajduje się bok c wprost bez szukania kątów A i B, i do tego służy wzór (121); albowiem według tego wzoru mamy $c^2 = a^2+b^2-2ab\,\text{dos}\,C$; idzie tylko o przerobienie tego wzoru w ten sposób aby logarytmy mogły być do niego stosowane, co znowu bez wprowadzenia kąta posiłkowego zrobione być nie może. W tym celu dodajmy i odejmijmy na drugiej stronie $2ab$ będzie, a^2 $c^2 = a^2+b^2-2ab+2ab-2ab\,\text{dos}\,C$

albo $c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\text{dos}\,C) \ldots (\alpha)$ lub też

$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1+\text{dos}\,C) \ldots (\beta)$

a że $1-\text{dos}\,C = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C$ (57), $1+\text{dos}\,C = 2\,\text{dos}^2\tfrac{1}{2}C$ (56), to jest

jeszcze $c^2 = (a-b)^2 + 4ab\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C$ lub $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\,\text{dos}^2\tfrac{1}{2}C$,

albo mnożąc i dzieląc pierwsze równanie przez $(a-b)^2$ a drugie przez $(a+b)^2$ wypada $c^2 = (a-b)^2\left\{1 + \frac{4ab\,\text{wst}^2\frac{1}{2}C}{(a-b)^2}\right\}$ i

$c^2 = (a+b)^2\left\{1 - \frac{4ab\,\text{dos}^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right\}$ — Teraz możemy wprowadzić kąt posiłkowy φ tako, aby $\frac{2\,\text{wst}\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a-b} = \text{sty}\,\varphi$, wypada

$c^2 = (a-b)^2\{1+\text{sty}^2\varphi\}$, gdy zaś $\text{dos}^2\varphi = \frac{1}{1+\text{sty}^2\varphi}$ (75) więc

$1+\text{sty}^2\varphi = \frac{1}{\text{dos}^2\varphi}$ a tem samem $c^2 = \frac{(a-b)^2}{\text{dos}^2\varphi}$ i nakoniec

$c = \frac{a-b}{\text{dos}\,\varphi}$ lub $c = \frac{(a-b)}{\text{dos}\,\varphi} \ldots (\alpha')$ — Jeżeli zaś położymy $\frac{2\,\text{dos}\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a+b} = \text{dos}\,\varphi$ wtedy jest $c^2 = (a+b)^2(1-\text{dos}^2\varphi)$ czyli

$c^2 = (a+b)^2 \, wrt^2 \varphi$ czyli $c = (a+b) \, wrt \varphi$ lub $c = \frac{(a+b) \, wrt \varphi}{R}$ (β')

Użyjmy do wynalezienia c wzorów (α') jest $stg \varphi = \frac{2 \, wrt \frac{1}{2} C \sqrt{ab}}{a-b}$.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log wrt \tfrac{1}{2} C &= 9{,}5759300 \\ \tfrac{1}{2} \log a &= 1{,}4192671 \\ \tfrac{1}{2} \log b &= 1{,}2572739 \\ D.\,a.\log(a-b) &= 7{,}4406920 \\ \hline \log stg \varphi &= 9{,}9341930 = \log stg(40°40'32'') \end{aligned}$$

więc $\varphi = 40°40'32''$

teraz $c = \frac{R(a-b)}{dos \varphi}$

$$\begin{aligned} \log R &= 10{,}0000000 \\ \log(a-b) &= 2{,}5593080 \\ D.\,a.\log dos \varphi &= 0{,}1200945 \\ \hline \log c &= 2{,}6794025 = \log 477{,}97 \end{aligned}$$

tojest że $c = 477{,}97$.

Wreszcie powierzchnia daje się wynaleźć ze wzoru

$\Delta = \frac{1}{2} ab \, wrt C$.

101. Dane są trzy boki trójkąta wynaleźć trzy kąty i powierzchnię —

Dla wynalezienia kątów trójkąta użyjmy wzorów (119) albo (120) i mamy dla każdego kąta po przywróceniu promienia

$wrt \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ albo $dos \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$wrt \frac{1}{2} B = R \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ $dos \frac{1}{2} B = R \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$

$wrt \frac{1}{2} C = R \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$. $dos \frac{1}{2} C = R \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

gdy zaś połowy tylko kątów wynajdziemy, więc żaden z nich nie przewyższy 90° stopni i każdy wypadnie ostry a podwojony da kąt żądany niewątpliwy. —

12.

Niech $a = 575.4$, $b = 488$, $c = 396$, jest $p = \frac{575.4+488+396}{2} = 729.7$

Dla kąta A mamy $\sin\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 241.7 \times 333.7}{488 \times 396}}$

$$
\begin{aligned}
2\log R &= 20 \\
\log 241.7 &= 2.3832767 \\
\log 333.7 &= 2.5233562 \\
\text{C. d. a.} \log 488 &= 7.3115802 \\
\text{C. d. a.} \log 396 &= 7.4023048 \\
\log \sin\tfrac{1}{2}A &= \frac{19.6205179}{2} = 9.8102589 = \log\sin(40^\circ 14' 37'')
\end{aligned}
$$

bo jest zaś $\tfrac{1}{2}A = 40^\circ 14' 37''$; $A = 80^\circ 29' 14''$. —

Dla kąta B mamy $\cos\tfrac{1}{2}B = R\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} = \sqrt{\frac{R^2 \times 729.7 \times 241.7}{575.4 \times 396}}$

$$
\begin{aligned}
2\log R &= 20. \\
\log 729.7 &= 2.8631443 \\
\log 241.7 &= 2.3832767 \\
\text{C. d. a.} \log 575.4 &= 7.2400301 \\
\text{C. d. a.} \log 396 &= 7.4023048 \\
\log \cos\tfrac{1}{2}B &= \frac{19.8887559}{2} = 9.9443779 = \log\cos(28^\circ 23')
\end{aligned}
$$

bo jest zaś $\tfrac{1}{2}B = 28^\circ 23'$. a cały $B = 56^\circ 46'$

Nakoniec $\sin\tfrac{1}{2}C = R\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot 154.3 \times 241.7}{575.4 \times 488}}$

$$
\begin{aligned}
2\log R &= 20. \\
\log 154.3 &= 2.1883659 \\
\log 241.7 &= 2.3832767 \\
\text{C. d. a.} \log 575.4 &= 7.2400301 \\
\text{C. d. a.} \log 488 &= 7.3115802 \\
\log \sin\tfrac{1}{2}C &= \frac{19.1232529}{2} = 9.5616264 = \log\sin(21^\circ 22' 23'')
\end{aligned}
$$

bo jest zaś $\tfrac{1}{2}C = 21^\circ 22' 23''$ więc cały $C = 42^\circ 44' 46''$.

Summa tych trzech kątów wynosi razem 180°, jak być powinno. —

102. Przypatrując się logarytmom wstaw i dostaw postrzegamy, iż logarytmy wstaw kątów pomiędzy zero i 45°, jako zawarte pomiędzy granicami $-\infty$ i $-0{,}3010300$ odpowiadającemi 0 i $\frac{1}{2}$ daleko prędzej rosną, aniżeli ubywają logarytmy dostaw tychże kątów, jako zawarte pomiędzy granicami 0 i $-0{,}3010300$ odpowiadającemi 1 i $\frac{1}{2}$; gdy znowu przeciwnie logarytmy dostaw kątów od 45° do 90°, jako zamknięte pomiędzy granicami $-0{,}3010300$ i $-\infty$ odpowiadającemi $\frac{1}{2}$ i 0 daleko widoczniej ubywają, aniżeli rosną ~~wstawą~~ logarytmy wstaw tychże kątów, jako zawarte pomiędzy granicami $-0{,}3010300$ i 0, odpowiadającemi $\frac{1}{2}$ i 1.; zkąd się pokazuje, że dla kątów pomiędzy 0 i 45° różnice pomiędzy logarytmami wstaw a dla kątów od 45° do 90° pomiędzy logarytmami dostaw, daleko są widoczniejsze od różnic pomiędzy logarytmami dostaw kątów od 0 do 45° a wstaw od 45° do 90°, i to tak dalece, że te ostatnie przedstawiając się dopiero w ~~pomniejszych~~ dalszych cyfrach dziesiętnych, w tablicach nie zbyt obszernych już się nie znajdują. Co gdy tako jest, pewniejsze wypadki otrzymamy, kiedy kąty niższe od 45° rachować będziemy zapomocą wzorów na wstawy a kąty wyższe od 45° zapomocą wzorów na dostawy.

103. Jeżeli kąty trójkąta, którego trzy jego boki są wiadome, obrachowane być mogą zapomocą wstaw na całe kąty – Wzór do tego służący wyprowadzimy sposobem następującym. Wiemy, iż $\text{wst}\,2a = 2\,\text{wst}\,a.\,\text{dos}\,a$ (24) położywszy więc za $\text{wst}\,a$ i $\text{dos}\,a$ wartości ze wzorów (119 120) wypada

$$\text{wst}\,A = 2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \quad \ldots (126)$$

Używając jednakże tego wzoru dla zniesienia wątpliwości, jakiemu kątowi odpowiada wartość wynaleziona, należy się radzić wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, w którym według tego, jako $A < 90^\circ$, $A = 90^\circ$, $A > 90^\circ$; a zatem jako $\cos A$ jest dodatnia, równa zero, lub ujemna, wypada $a^2 < b^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 > b^2 + c^2$. O czem dowiedziawszy się przez rachunek, należy w pierwszym przypadku brać kąt ostry, w ostatnim rozwarty. Dla tej jednakże przyczyny rachunek przeciągły, sprawia to, iż wzory na sinusy i cosinusy połowy kąta, są dogodniejsze. —

W reszcie kąty trójkąta prostokreślnego, skoro trzy boki są dane, mogą być także wynalezione, zapomocą wzorów na styczne, które się otrzymują przez podzielenie stron odpowiadających równań (119) i (120); albowiem wypada

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$ czyli $$\text{stg}\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$ podobnie otrzymamy

$$\text{stg}\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \quad \text{stg}\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. —$$

104. Nakoniec abyśmy jeszcze wynaleźli powierzchnię trójkąta w przypadku, który uważamy, podstawmy we wzorze $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$, wartość (126) a otrzymamy $\Delta = \frac{2bc\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2bc}$, czyli?

$$(127)\quad \Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$\log p = \log 729{,}7 = 2{,}8631443.$

$\log(p-a) = \log 154{,}3 = 2{,}1883659.$

$\log(p-b) = \log 241{,}7 = 2{,}3832767$

$\log(p-c) = \log 333{,}7 = 2{,}5233562$

$\log\Delta = \frac{9{,}9581431}{2} = 4{,}9790715 = \log 95295{,}3$ czyli $\Delta = 95295{,}3.$

105. Zdarzają się przypadki, w których można odstąpić od ogólnego sposobu rozwiązania trójkątów prostokreślnych i chwycić się szczególnego, jakto dla uproszczenia rachunku, jużteż dla otrzymania wypadków dokładniejszych więcej zbliżonych i niezależnych od błędów tablic. W tym szczególnym sposobie rozwiązywania trójkątów, jeżeli się zdarzą kąty bardzo małe, zastąpimy wartości ich sinusów i cosinusów przez szeregi 89, 90, lecz wtedy także czyli kąty powinny być wyrażone w częściach promienia według §59 lub §60 — W reszcie także uważamy za należące do koła, którego promień równy jest jedności. —

Przypadek pierwszy. Uważajmy trójkąt prostokreślny, którego kąty A B są bardzo małe, zkąd się pokazuje, że kąt C jest bardzo rozwarty,

Według szeregu (90) i stosownie do § 60 możemy brać $wrt A = \frac{A}{R''} - \frac{A^3}{6R''^3}$, $wrt B = \frac{B}{R''} - \frac{B^3}{6R''^3}$, a gdy $C = 180° - (A+B)$ więc $wrt C = wrt(A+B)$ (34) albo $wrt C = \frac{A+B}{R''} - \frac{(A+B)^3}{6R''^3}$. Znając więc jeszcze bok przyległy c znajdziemy dwa inne boki a, b, ze wzorów $\frac{wrt A}{a} = \frac{wrt C}{c}$ czyli $\frac{wrt A}{a} = \frac{wrt(A+B)}{c}$ i $\frac{wrt B}{b} = \frac{wrt(A+B)}{c}$, bo z nich najprzód otrzymujemy

$$a = \frac{c\, wrt A}{wrt(A+B)} \quad i \quad b = \frac{c.\, wrt B}{wrt(A+B)},$$

w te wzory podstawiwszy wartości wyżej przytoczone będzie,

$$a = \frac{c\left(\frac{A}{R''} - \frac{A^3}{6R''^3}\right)}{\frac{A+B}{R''} - \frac{(A+B)^3}{6R''^3}} = \frac{c\frac{A}{R''}\left(1 - \frac{A^2}{6R''^2}\right)}{\frac{A+B}{R''}\left(1 - \frac{(A+B)^2}{6R''^2}\right)} = \frac{c.A}{A+B}\left(1 - \frac{A^2}{6R''^2}\right)\left\{1 - \frac{(A+B)^2}{6R''^2}\right\}^{-1} \text{ czyli}$$

$$a = \frac{cA}{A+B}\left(1 - \frac{A^2}{6R''^2}\right)\left(1 + \frac{A^2}{6R''^2} + \frac{2AB}{6R''^2} + \frac{B^2}{6R''^2} \ldots\right) = \frac{cA}{A+B}\left(1 - \frac{A^2}{6R''^2} + \frac{A^2}{6R''^2} + \frac{2AB}{6R''^2} + \frac{B^2}{6R''^2} \ldots\right)$$

czyli ostatecznie $a = \frac{cA}{A+B}\left(1 + \frac{2AB+B^2}{6R''^2}\right)$; i podobnie znajdziemy, że

$$b = \frac{cB}{A+B}\left(1 + \frac{A^2+2AB}{6R''^2}\right).$$

Dodawszy zaś ostatnie równania wypada $a+b-c = \frac{1}{2}\frac{c.AB}{R''^2}$. zkąd $b = c + \frac{\frac{1}{2}c.AB}{R''^2} - a$, według którego równania b daje się prędzej otrzymać po wynalezieniu a. Gdzie nie chodzi o wielkie zbliżenie, tam przestać można na pierwszych wyrazach $\frac{cA}{A+B}$ i $\frac{cB}{A+B}$, które i tako dają wypadki, szczególniej kiedy kąty zaledwie jeden stopień przechodzą, takie same, jakie się otrzymują przy rozwiązaniu

Przykład. Niech $c = 328$, $A = 1°17'30'' = 4650''$, $B = 46'20'' = 2780''$ więc $A+B = 7430''$ ... Rachujemy najprzód $\frac{c.A}{A+B} = a'$

$\log c = 2,5158738$
$\log A = 3,6674530$
$C.\ d.\ a. \log(A+B) = 6,1290112$
$\log a' = 2,3123380 = \log 205,276.$

$\log B^2 = 2\log B = 6,8880896 = \log 7728400$

Rachujemy powtór $\frac{cA}{A+B}\left(\frac{2AB+B^2}{6R''^2}\right) = \frac{a'(2AB+B^2)}{6R''^2}$

$\log 2AB =$ $\log 2 = 0,3010300$
$\log A = 3,6674530$
$\log B = 3,4440448$
$\log 2AB = 7,4125278 = \log 25854000$

więc $2AB + B^2 = 25854000 + 7728400 = 33582400.$

$\log \frac{a'(2AB+B^2)}{6R''^2} =$ $\log a' = 2,3123380$
$\log 33582400 = 7,5254647$
$C.\ a. \log 6 = 9,2218487$
$19,0596514$
$\cdot 10,6288502$
$\log 0,026965 = 8,4308012$ $(-10$

$\log R''^2 = 10,6288502$ (§ 59).

to jest, że $\frac{a'(2AB+B^2)}{6R''^2} = 0,026965$

więc $a = 205,276 + 0,026965$

czyli $a = 205,302965$.

Dla wynalezienia boku b potrzeba najprzód obrachować $\frac{\frac{1}{2}c\,AB}{R''^2}$

$\log \frac{\frac{1}{2}c.AB}{R''^2} = \log \frac{1}{2}c = 2,2148438$
$\log A = 3,6674530$
$\log B = 3,4440448$
$\overline{\quad 19,3263416}$
$\log R''^2 = 10,6288502$
$\log 0,04983 = \overline{8,6974914}\ (-10$

$b = c + \frac{\frac{1}{2}c\,AB}{R''^2} - a$

$b = 328$
$\frac{\frac{1}{2}c\,AB}{R''^2} = 0,04983$
$b + \frac{\frac{1}{2}c\,AB}{R''^2} = 328,049830$
$a = 205,302965$
$b = 122,746865.$

wreszcie $C = 180 - (A+B) = 177°56'10''$

106. <u>Drugi przypadek</u>. Niech będą dane dwa boki a, b, z kątem zawartym $C = \pi - \alpha$, gdzie α jest bardzo małe. Mamy $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)$ czyli $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, gdy zaś $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{R''^2}$ (89; 860) więc $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right)$ albo $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - \frac{ab\alpha^2}{R''^2} = (a+b)^2 - \frac{ab\alpha^2}{R''^2}$, wyciągając zaś pierwiastek przybliżony mamy $c = a + b - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\frac{\alpha^2}{R''^2}$ ... (g)

Znajdziemy kąt A ze równania $\sin A = \frac{a}{c}\sin C = \frac{a}{c}\sin\alpha$, w które podstawiwszy wartości za $\sin\alpha$ i c wypada, gdy $\sin\alpha = \frac{\alpha}{R''} - \frac{\alpha^3}{6R''^3}$,

$\sin A = \frac{a\left(\frac{\alpha}{R''} - \frac{\alpha^3}{6R''^3}\right)}{a + b - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\frac{\alpha^2}{R''^2}} = a\left(\frac{\alpha}{R''} - \frac{\alpha^3}{6R''^3}\right)\left\{(a+b) - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right\}^{-1} = \frac{a\alpha}{R''}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6R''^2}\right)\left\{(a+b)^{-1} + (a+b)^{-2}\frac{\frac{1}{2}ab\alpha^2}{(a+b)R''^2}\right\}$

albo $\sin A = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right)\left(1 + \frac{\frac{1}{2}ab}{(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right) = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6R''^2} + \frac{\frac{1}{2}ab}{(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right)$

albo $\sin A = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{6R''^2}\right)$ ... Lecz według (93) mamy $A = \sin A + \frac{1}{6}\sin^3 A$ gdzie A wyrażone jest w sekundach, skoro zaś druga strona jest w częściach promienia, więc i pierwsza w takich być powinna, a zatem właściwie (860) jest $\frac{A}{R''} = \sin A + \frac{1}{6}\sin^3 A$. — W tym wzorze za $\sin A$ podstawiwszy wartość dopiero wynalezioną mamy $\frac{A}{R''} = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{6R''^2}\right) + \frac{a^3\alpha^3}{R''^3(a+b)^3}$, inne wyrazy opuszczamy; albo $\frac{A}{R''} = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left\{1 + \left(\frac{ab - a^2 - b^2}{6(a+b)^2} + \frac{a^2}{(a+b)^2}\right)\frac{\alpha^2}{R''^2}\right\} = \frac{a\alpha}{R''(a+b)}\left(1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right)$

albo po zniesieniu mianownika mamy

(h) $A = \frac{a\alpha}{a+b}\left(1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\frac{\alpha^2}{R''^2}\right)$, z kąd A otrzymujemy w sekundach.

Niech $a = 1000$, $b = 2400$, $C = 179°32'$ wtedy $\alpha = 28'$ i będzie według (g)
$a + b - c = \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\frac{\alpha^2}{R''^2} = \frac{1200000}{3400}\left(\frac{28'}{R''}\right)^2$, gdy zaś $\frac{28'}{R''} = \frac{1680''}{206264,8''} = 0,00814487$.
więc $a + b - c = \frac{1200000}{3400} \times 0,0000663389 = 0,0234137$, a tem samem

$c = 3399,9765863$. Nareszcie biorąc tylko pierwsze zbliżenie z (h) toiest tylko pierwszy wyraz z nawiasu, mamy $A = \frac{a\alpha}{a+b} = \frac{1000 \times 28'}{3400} = 8'14''$, a więc $B = \alpha - 8'14'' = 19'46''$

107. Rozwiążemy jeszcze przypadek, w którym dane są dwa boki i kąt zawarty w trójkącie prostokreślnym, za pomocą szeregów. Dane boki są a, b, kąt C. Według (114) mamy $\frac{b}{a} = \frac{\text{wst} B}{\text{wst} A}$, że zaś $A = 180° - (B+C)$ więc $\text{wst} A = \text{wst}(B+C)$ (34), i jest $\frac{b}{a} = \frac{\text{wst} B}{\text{wst}(B+C)}$, albo $a \,\text{wst} B = b . \text{wst}(B+C)$, albo $a\,\text{wst} B = b\,\text{wst} B \,\text{dost} C + b\,\text{wst} C\,\text{dost} B$, dzieląc przez $\text{dost} B$ wypada, $\frac{a\,\text{wst} B}{\text{dost} B} = b\,\text{dost} C . \frac{\text{wst} B}{\text{dost} B} + b\,\text{wst} C$, zkąd $(a - b\,\text{dost} C)\frac{\text{wst} B}{\text{dost} B} = b\,\text{wst} C$, więc $\frac{\text{wst} B}{\text{dost} B} = \frac{b . \text{wst} C}{a - b\,\text{dost} C}$.

W tem równaniu połóżmy zamiast wstaw i dostaw wartości (87) i (88) będzie

$$\frac{\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\frac{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}}{2}} = \frac{\frac{be^{C\sqrt{-1}} - be^{-C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{a - \frac{be^{C\sqrt{-1}} + be^{-C\sqrt{-1}}}{2}}.$$

Mnożąc zaś obiedwie strony równania przez $2\sqrt{-1}$ a dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})}.$$

Dzielmy licznik i mianownik pierwszej strony przez $e^{-B\sqrt{-1}}$

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1} = \frac{be^{C\sqrt{-1}} - be^{-C\sqrt{-1}}}{2a - be^{C\sqrt{-1}} - be^{-C\sqrt{-1}}}.$$ Zniósłszy mianowniki

$$2ae^{2B\sqrt{-1}} - 2a - e^{2B\sqrt{-1}} . be^{C\sqrt{-1}} + be^{C\sqrt{-1}} - e^{2B\sqrt{-1}} . be^{-C\sqrt{-1}} + be^{-C\sqrt{-1}} =$$

$$= e^{2B\sqrt{-1}} . be^{C\sqrt{-1}} + be^{C\sqrt{-1}} - e^{2B\sqrt{-1}} . be^{-C\sqrt{-1}} - be^{-C\sqrt{-1}}$$ albo

$$2ae^{2B\sqrt{-1}} - 2a - e^{2B\sqrt{-1}} . be^{C\sqrt{-1}} + be^{-C\sqrt{-1}} = e^{2B\sqrt{-1}} . be^{C\sqrt{-1}} - be^{-C\sqrt{-1}}$$ albo

$$2ae^{2B\sqrt{-1}} - 2e^{2B\sqrt{-1}} be^{C\sqrt{-1}} = 2a - 2be^{-C\sqrt{-1}}$$ albo

$$(a - be^{C\sqrt{-1}})e^{2B\sqrt{-1}} = a - be^{-2\sqrt{-1}},$$ zkąd

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{C\sqrt{-1}}}$$ dzielmy jeszcze licznik i mia-
nownik drugiey strony przez a otrzymamy

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{1-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}}{1-\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}}$$ nakoniec wziąwszy po obu
dwóch stronach logarytmy neperowskie, gdy $\log e = 1$, będzie

$$2B\sqrt{-1} = \log'\left(1-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}\right) - \log'\left(1-\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}\right)$$ a teraz rozwi-
jaiąc wyrazy drugiey strony według znanego szeregu logaryt-
micznego $\log'(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} -$ itd (§II przypis 1) gdy dla
naznaczonego odejmowania wyrazy drugiego szeregu będą doda-
tne a pierwszego ujemne otrzymujemy

$$2B\sqrt{-1} = \frac{b}{a}\left(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(e^{2C\sqrt{-1}} - e^{-2C\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^3}{3a^3}\left(e^{3C\sqrt{-1}} - e^{-3C\sqrt{-1}}\right) + \dots$$

dzieląc zaś przez $2\sqrt{-1}$ wypada

$$B = \frac{b}{a}\left(\frac{e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{e^{2C\sqrt{-1}} - e^{-2C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^3}{3a^3}\left(\frac{e^{3C\sqrt{-1}} - e^{-3C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

a gdy na mocy (88) jest $\frac{e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin mC$ więc

(128) $$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \frac{b^4}{4a^4}\sin 4C + \text{itd}$$

(Za pomocą tego szeregu, który tem więcey jest zbiegaiącym
się, im b mnieysze jest ze względu na a, można obrachować
kąt B w częściach promienia, a następnie wiadomym sposobem
przejść do minut.

Wynajduje się znowu kąt A ze zrównania $A = 180 - (B+C)$.
Co się tyczy boku c mamy równanie $c = a^2 - 2ab\cos C + b^2 =$
$= (a-be^{C\sqrt{-1}})(a-be^{-C\sqrt{-1}})$ albowiem iloczyn dwóch tych czynni-
ków daje $a^2 - ab(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}}) + b^2$ a (87) $e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}} = 2\cos C$ (87)
więc przechodzi na $a^2 - 2ab\cos C + b^2$.

Jest więc $c^2 = (a - b e^{c\sqrt{-1}})(a - b e^{-c\sqrt{-1}})$ albo $c^2 = a^2(1 - \frac{b}{a} e^{c\sqrt{-1}})(1 - \frac{b}{a} e^{-c\sqrt{-1}})$

biorąc logarytmy neperowskie po obudwóch stronach wypada

$2\log c = 2\log a + \log(1 - \frac{b}{a} e^{c\sqrt{-1}}) + \log(1 - \frac{b}{a} e^{-c\sqrt{-1}})$ albo rozwijając dwa ostatnie wyrazy według szeregu niedawno przytoczonego, wypada.

$2\log c = 2\log a - \frac{b}{a}(e^{c\sqrt{-1}} + e^{-c\sqrt{-1}}) - \frac{b^2}{2a^2}(e^{c\sqrt{-1}} + e^{-2c\sqrt{-1}}) - \frac{b^3}{3a^3}(e^{c\sqrt{-1}} + e^{-c\sqrt{-1}}) - \ldots$ itd

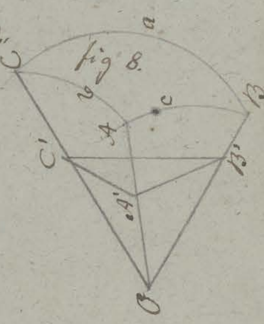
dzieląc przez 2 i pamiętając że $\frac{e^{mc\sqrt{-1}} + e^{-2mc\sqrt{-1}}}{2} = \cos mc$ (87)

otrzymujemy ostatecznie

(129) $\log c = \log a - \frac{b}{a}\cos C - \frac{b^2}{2a^2}\cos 2C - \frac{b^3}{3a^3}\cos 3C - \frac{b^4}{4a^4}\cos 4C -$ itd

teraz idzie tylko o przejście do logarytmów pospolitych co się znowu otrzymuje przez pomnożenie każdego wyrazu przez zamiennik ~~0,43429448~~ 0,43429448.

V



108. Nazywamy trójkątem kulistym część powierzchni kuli zamkniętą pomiędzy trzema kołami kół wielkich. Te koła nazwane bokami trójkąta, uważają się zawsze mniejsze od 180°. Kąty trójkąta kulistego powstają z przecięcia się płaszczyzn na których się koła znajdują.

109. Niech będzie trójkąt kulisty ABC należący do kuli, której środek jest O. Trzy jego kąty nazwiemy przez A, B, C, trzy zaś boki przez a, b, c. Poprowadziwszy promienie OC, OA, OB, ~~i~~ płaszczyzny przez te promienie

utworzy się

utworzy się kąt bryłowy trójścienny przy O, miarą kątów płaskich tego kąta bryłowego są boki trójkąta, miarą zaś kątów ściennych (zamkniętych pomiędzy ścianami) tegoż kąta bryłowego są kąty trójkąta. — Obierzmy punkt A' na krawędzi OA i poprowadźmy dwie prostopadłe do tejże krawędzi po ścianach AOB, AOC, powstanie kąt A' który jest miarą kąta COAB a zatem i kąta A w trójkącie kulistym. Połączmy punkta C' i B', powstanie trójkąt prostokreślny A'B'C', w którym według (121) mamy

$$C'B'^2 = A'C'^2 + A'B'^2 - 2A'C' \cdot A'B' \,\mathrm{dos}\, A,$$ lecz i trójkąt C'OB' daje

$$C'B'^2 = OC'^2 + OB'^2 - 2OC' \cdot OB' \,\mathrm{dos}\, a$$ z kąd

$$OC'^2 + OB'^2 - 2OC' \cdot OB' \,\mathrm{dos}\, a = A'C'^2 + A'B'^2 - 2A'C' \cdot A'B' \,\mathrm{dos}\, A \quad \ldots\ldots (m)$$

Lecz w trójkącie C'A'O prostokątnym przy A', jest $A'C' = OA' \,\mathrm{sty}\, b$ (§ 85) i znowu $OA' = OC' \,\mathrm{dos}\, b$ (§ 84) więc $OC' = \frac{A'O}{\mathrm{dos}\, b}$.

Dla podobnej przyczyny mamy z trójkąta prostokątnego A'B'O, $A'B' = OA' \,\mathrm{sty}\, c$ i $OB' = \frac{A'O}{\mathrm{dos}\, c}$; te wartości dopiero wynalezione wstawiwszy w równanie (m) wypada. —

$$\frac{A'O^2}{\mathrm{dos}^2 b} + \frac{A'O^2}{\mathrm{dos}^2 c} - \frac{2A'O^2 \,\mathrm{dos}\, a}{\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c} = A'O^2 \,\mathrm{sty}^2 b + A'O^2 \,\mathrm{sty}^2 c - 2A'O^2 \,\mathrm{sty}\, b \,\mathrm{sty}\, c \,\mathrm{dos}\, A$$

Podzieliwszy obiedwie strony przez $A'O^2$, przeniósłszy wszystkie wyrazy na stronę pierwszą i położywszy styczne na $\frac{\mathrm{wst}}{\mathrm{dos}}$ jest

$$\frac{1-\mathrm{wst}^2 b}{\mathrm{dos}^2 b} + \frac{1-\mathrm{wst}^2 c}{\mathrm{dos}^2 c} - \frac{2\,\mathrm{dos}\, a}{\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c} + \frac{2\,\mathrm{wst}\, b \,\mathrm{wst}\, c \,\mathrm{dos}\, A}{\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c} = 0;$$ lecz $\frac{1-\mathrm{wst}^2 b}{\mathrm{dos}^2 b} = \frac{\mathrm{dos}^2 b}{\mathrm{dos}^2 b} = 1.$

więc $$2 - \frac{2\,\mathrm{dos}\, a}{\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c} + \frac{2\,\mathrm{wst}\, b \,\mathrm{wst}\, c \,\mathrm{dos}\, A}{\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c} = 0;$$ dzieląc przez 2 i znosząc mianowniki wypada $\mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c - \mathrm{dos}\, a + \mathrm{wst}\, b \,\mathrm{wst}\, c \,\mathrm{dos}\, A = 0.$

albo

$$(130) \quad \mathrm{dos}\, a = \mathrm{dos}\, b \,\mathrm{dos}\, c + \mathrm{wst}\, b \,\mathrm{wst}\, c \,\mathrm{dos}\, A$$

Podobnym wynajdują się sposobem wzory na dwa inne boki b i c i jest.

$$dos\,b = dos\,a\,dos\,c + wrt\,a\,wrt\,c\,dos\,B$$
$$dos\,c = dos\,a\,dos\,b + wrt\,a\,wrt\,b\,dos\,C.$$

110. Ze wzoru (130) wyciągając wartość na $dos\,A$ otrzymujemy,

$$dos\,A = \frac{dos\,a - dos\,b\,dos\,c}{wrt\,b.\,wrt\,c}$$, podnosząc obiedwie strony do kwadratu będzie $$dos^2 A = \frac{dos^2 a - 2\,dos\,a\,dos\,b\,dos\,c + dos^2 b\,dos^2 c}{wrt^2 b\,wrt^2 c}$$ odejmując obiedwie strony od jedności wypada

$$1 - dos^2 A = \frac{wrt^2 b\,wrt^2 c - dos^2 a + 2\,dos\,a\,dos\,b\,dos\,c - dos^2 b\,dos^2 c}{wrt^2 b\,wrt^2 c}$$

a że $1 - dos^2 A = wrt^2 A$, dalej $wrt^2 b = 1 - dos^2 b$ i $wrt^2 c = 1 - dos^2 c$, więc

$$wrt^2 A = \frac{(1 - dos^2 b)(1 - dos^2 c) - dos^2 a + 2\,dos\,a\,dos\,b\,dos\,c - dos^2 b\,dos^2 c}{wrt^2 b\,wrt^2 c}$$

albo $$wrt^2 A = \frac{1 - dos^2 a - dos^2 b - dos^2 c + 2\,dos\,a\,dos\,b\,dos\,c}{wrt^2 b\,wrt^2 c}$$

Nazwijmy licznik dla krótkości przez Z^2 kładąc

$$Z^2 = 1 - dos^2 a - dos^2 b - dos^2 c + 2\,dos\,a\,dos\,b\,dos\,c,$$

będzie po wyciągnieniu pierwiastku kwadratowego

$$wrt\,A = \frac{Z}{wrt\,b\,wrt\,c}$$, i dzieląc raz przez $wrt\,a$ jest

$$\frac{wrt\,A}{wrt\,a} = \frac{Z}{wrt\,a\,wrt\,b\,wrt\,c}.$$ Podobnym sposobem znajdziemy, że $\frac{wrt\,B}{wrt\,b} = \frac{Z}{wrt\,a\,wrt\,b\,wrt\,c}$ i $\frac{wrt\,C}{wrt\,c} = \frac{Z}{wrt\,a\,wrt\,b\,wrt\,c}$

więc jest w ogólności (131) $$\frac{wrt\,A}{wrt\,a} = \frac{wrt\,B}{wrt\,b} = \frac{wrt\,C}{wrt\,c}.$$

111. Weźmy dwa równania ustępu (109) i napiszmy pod postacią jako następuje

wrtb wrtc dosA = dosa − dosb dosc

wrta wrtb dosC = dosc − dosa dosb

Dla wyrugowania dosc pomnóżmy drugie równanie przez dosb i dodajmy do pierwszego otrzymamy:

wrtb wrtc dosA + wrta wrtb dosb dosC = dosa − dosa dos²b, albo

wrtb wrtc dosA + wrta wrtb dosb dosC = dosa (1 − dos²b) = dosa wrt²b

dzieląc przez wrtb wypada. wrtc dosA + wrta dosb dosC = dosa wrtb,

zamiast wrtc napiszmy $\frac{\text{wrta wrtC}}{\text{wrtA}}$ (131) będzie:

$\frac{\text{wrta wrtC dosA}}{\text{wrtA}}$ + wrta dosb dosC = dosa wrtb, dzieląc znowu przez wrta

jest 132) dota wrtb = dotA wrtC + dosC dosb

Jestto wzór pomiędzy czterema pierwiastkami trójkąta kulistego po sobie następującemi — jest on jednym ze sześciu do tej okoliczności należących; wypisujemy także pięć innych. —

dotb wrta = dotB wrtC + dosC dosa

dotc wrta = dotC wrtB + dosB dosa

dota wrtc = dotA wrtB + dosB dosc

dotb wrtc = dotB wrtA + dosA dosc

dotc wrtb = dotC wrtA + dosA dosb.

112. Według wzoru (131) mamy $\frac{\text{wrtb}}{\text{wrta}} = \frac{\text{wrtB}}{\text{wrtA}}$, a gdy dota wrtb = $\frac{\text{wrtb. dosa}}{\text{wrta}}$, przeto w ostatnim równaniu położywszy za $\frac{\text{wrtb}}{\text{wrta}}$ jego powyższą wartość, mamy dota wrtb = $\frac{\text{dosa. wrtB}}{\text{wrtA}}$, tę znowu wartość podstawmy w równanie (132) wypada

$\frac{\text{dosa. wrtB}}{\text{wrtA}}$ = dotA wrtC + dosC dosb albo

dosa wrtB = wrtA dosC dosb = dosA wrtC, przez zamianę głosek A na B i a na b otrzymujemy także

dosb wrtA − wrtB dosC dosa = dosB wrtC.

Dla wyrugowania dosb pomnóżmy drugie równanie przez dosC i dodajmy

do pierwszego będzie,

$$\cos a \sin B - \cos a \sin B \cos^2 C = \cos A \sin C + \cos B \cos C \sin C$$

albo $\cos a \sin B (1 - \cos^2 C) = \sin C (\cos A + \cos B \cos C)$ albo

$$\cos a \sin B \sin^2 C = \sin C (\cos A + \cos B \cos C)$$

podzieliwszy przez $\sin C$. po uporządkowaniu wypada

$$(133) \quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

113. To ostatnie równanie pomiędzy trzema kątami i bokiem przedstawia uderzające podobieństwo ze zrównaniem pomiędzy trzema bokami i kątem (130); przyczyny tego podobieństwa nie można gdzie indziej szukać, tylko we własności trójkąta biegunowego. Jakoż wiemy z Solidometryi, że każdy trójkąt kulisty, którego kąty są A, B, C, i boki a, b, c odpowiada zawsze trójkątowi biegunowemu, którego boki są 180°−A, 180°−B, 180°−C a kąty przeciwne 180°−a, 180°−b, 180°−c, i zastosowawszy wzór 130 do tej uwagi otrzymujemy.

$$\cos(180° - A) = \cos(180° - B)\cos(180° - C) + \sin(180° - B)\sin(180 - C)\cos(180° - a)$$

że zaś ogólnie $\cos(180° - A) = -\cos A$ a $\sin(180 - A) = \sin A$

więc $-\cos A = -\cos B \times -\cos C + \sin B \sin C \times -\cos a$

albo nakoniec $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

wzór, który już znaleźliśmy innym sposobem. —

114. Ze wzoru (130) przez następujący sposób postępowania, znajdziemy $\sin \frac{1}{2} A$ i $\cos \frac{1}{2} A$ tak wyrażone w równaniach, iż logarytmy do nich z łatwością dają się stosować. Wyciągnąwszy wartość na $\cos A$ jest

$$(9) \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

odjąwszy obiedwie strony od jedności wypada

$$1 - \text{dost}A = \frac{\text{wst}b\,\text{wst}c - \text{dost}a + \text{dost}b\,\text{dost}c}{\text{wst}b\,\text{wst}c} \quad \text{albo}$$

$$1 - \text{dost}A = \frac{\text{dost}(b-c) - \text{dost}a}{\text{wst}b\,\text{wst}c} \; (23), \text{ lecz na mocy wzoru } (67)$$

$$\text{dost}(b-c) - \text{dost}a = 2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b) \text{ nadto } 1-\text{dost}A = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A \; (57)$$

więc
$$2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}b\,\text{wst}c} \quad \text{albo}$$

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}}$$

Do obiedwóch stronach równania (9) dodajmy 1. otrzymamy

$$1 + \text{dost}A = \frac{\text{wst}b\,\text{wst}c + \text{dost}a - \text{dost}b\,\text{dost}c}{\text{wst}b\,\text{wst}c} \quad \text{albo}$$

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{dost}a - (\text{dost}b\,\text{dost}c - \text{wst}b\,\text{wst}c)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}, \quad \text{albo}$$

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{dost}a - \text{dost}(b+c)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}$$

gdy zaś według (67) $\text{dost}a - \text{dost}(b+c) = 2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ więc

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst}b\,\text{wst}c} \quad \text{albo}$$

$$\text{dost}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}}$$

Podobnym sposobem otrzymać się dają wstawy i dostawy połowy kątów B i C, tak iż następujące wzory powstają

(134)

1) $\text{wst}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}}$ 4) $\text{dost}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst}b\,\text{wst}c}}$,

2) $\text{wst}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+a-c)}{\text{wst}a\,\text{wst}c}}$ 5) $\text{dost}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}a\,\text{wst}c}}$

3) $\text{wst}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(c+a-b)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(c+b-a)}{\text{wst}a\,\text{wst}b}}$. 6) $\text{dost}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{wst}a\,\text{wst}b}}$.

115. Ze wzoru (133) przez podobne postępowanie, moglibyśmy wynaleźć wzory na $\text{wst}\tfrac{1}{2}a$ i $\text{dost}\tfrac{1}{2}a$, lecz takie do wypadków zbadanych dojdziemy ze wzorów (134) przez uważanie trójkąta biegunowego, tłumacząc wszędzie, $A = 180^\circ - a$, $B = 180^\circ - b$, $C = 180^\circ - c$ i $a = 180^\circ - A$, $b = 180^\circ - B$ i nakoniec

$c = 180^\circ - C$. Zaloż z trzech drugich równań mamy $a+b+c = 540^\circ - (A+B+C)$ a zatem $\frac{1}{2}(a+b+c) = 270^\circ - \frac{1}{2}(A+B+C)$, zkąd $wst\,\frac{1}{2}(a+b+c) = wst\{270^\circ - \frac{1}{2}(A+B+C)\}$ $= -\,dos\,\frac{1}{2}(A+B+C)$ (40). —

Dalej jest $a+b-c = 180^\circ - (A+B-C)$ więc $\frac{1}{2}(a+b-c) = 90^\circ - \frac{1}{2}(A+B-C)$ a tem samem $wst\,\frac{1}{2}(a+b-c) = wst\{90^\circ - \frac{1}{2}(A+B-C)\} = dos\,\frac{1}{2}(A+B-C)$; podobnie znajdziemy, że $wst\,\frac{1}{2}(a-b+c) = dos\,\frac{1}{2}(A+C-B)$ i $wst\,\frac{1}{2}(b+c-a) = dos\,\frac{1}{2}(B+C-A)$; a gdy nadto $wst\,b = wst(180^\circ - B) = wst\,B$, $wst\,\frac{1}{2}A = wst(90^\circ - \frac{1}{2}a) = dos\,\frac{1}{2}a$, a $dos\,\frac{1}{2}A = dos(90^\circ - \frac{1}{2}a) = wst\,\frac{1}{2}a$ więc wartości dopiero otrzymane podstawiwszy we wzory (134) będzie

(135)

$$1)\ dos\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{dos\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,dos\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{wst\,B\,wst\,C}} \qquad 4)\ wst\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-dos\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,dos\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{wst\,B\,wst\,C}}$$

$$2)\ dos\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{dos\,\frac{1}{2}(B+A-C)\,dos\,\frac{1}{2}(B+C-A)}{wst\,A\,wst\,C}} \qquad 5)\ wst\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-dos\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,dos\,\frac{1}{2}(A+C-B)}{wst\,A\,wst\,C}}$$

$$3)\ dos\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{dos\,\frac{1}{2}(C+A-B)\,dos\,\frac{1}{2}(C+B-A)}{wst\,A\,wst\,B}} \qquad 6)\ wst\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-dos\,\frac{1}{2}(A+B+C)\,dos\,\frac{1}{2}(A+B-C)}{wst\,A\,wst\,B}}$$

Pomimo tego, że w wyrażeniach na $wst\,\frac{1}{2}a$, $wst\,\frac{1}{2}b$ .. pod znakiem pierwiastkowym jest znak mniej, wyrażenia te są rzetelne, bo ponieważ mamy $wst(x-90^\circ) = wst\,x\,dos\,90^\circ - wst\,90^\circ\,dos\,x$ $= -\,dos\,x$ czyli $-\,dos\,x = wst(x-90^\circ)$, więc też jest także $-\,dos\,\frac{1}{2}(A+B+C) = wst\left(\frac{A+B+C}{2} - 90^\circ\right)$; nadto gdy summa kątów trójkąta kulistego zamknięta jest pomiędzy dwoma i sześcioma kątami prostemi, czyli pomiędzy 180° i $6\times 90^\circ$, więc $wst\left(\frac{A+B+C}{2} - 90^\circ\right)$, jako łuku zawartego pomiędzy zero i 180° jest dodatna a tem samem i wyrażenie $-\,dos\,\frac{1}{2}(A+B+C)$ jest także dodatne. Drugi czynnik $dos\,\frac{1}{2}(B+C-A)$ jest zawsze dodatny, gdyż $B+C-A$ nie przechodzi nigdy 180° a tem samem połowa summy nie przechodzi 90°, do której granicy dostawa jest dodatna

Że summa $B+C-A$ nie przechodzi 180° pochodzi stąd, iż ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ w trójkącie biegunowym a, b, c ~~[illegible]~~ jeden bok mniejszy jest od summy dwóch drugich ~~$B+C-A = 180$~~ więc $180 - A < 360 - (B+C)$ a zatem $B+C-A < 180^\circ$

116. We wzorach (134) mnożymy stronami odpowiadającemi 1) przez 5) otrzymamy, $\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}^2 c\;\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b}}$ albo

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b}}$$

, gdy zaś czynnik drugi drugiej strony równania, na mocy (6) tychże samych wzorów równa się $\text{dos}\tfrac{1}{2}C$, więc $\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}\,c}\,\text{dos}\tfrac{1}{2}C \ldots (G)$

Mnożymy dalej wzór 2) przez 4) i uprościmy, zaraz za pomocą wzoru (6) wypada $\text{wst}\tfrac{1}{2}B\,\text{dos}\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst}\,c}\,\text{dos}\tfrac{1}{2}C \ldots (G')$

Pomnożywszy podobnie wzór (4) przez (5) i uprościwszy za pomocą 3) wypada $\text{dos}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\text{wst}\,c}\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C \ldots (H)$

Nakoniec pomnożywszy wzór 1) przez 2) i uprościwszy przez 3) jest $\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}\tfrac{1}{2}B = \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{wst}\,c}\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C \ldots (H')$

Dodajmy raz a drugi raz odejmijmy od siebie równania (G) i (G'), jest $\text{wst}\tfrac{1}{2}A\,\text{dos}\tfrac{1}{2}B \pm \text{wst}\tfrac{1}{2}B\,\text{dos}\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\text{dos}\tfrac{1}{2}C}{\text{wst}\,c}\left\{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b) \pm \text{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\right\}$ pierwsza strona na mocy wzorów (20) i (21) biorąc znak + znaczy $\text{wst}\tfrac{1}{2}(A+B)$ biorąc zaś znak mniej znaczy $\text{wst}\tfrac{1}{2}(A-B)$, drugiej strony część zamknięta w nawiasie, na mocy wzorów (64) i (65) biorąc znak górny znaczy $2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c\,\text{dos}\tfrac{1}{2}(a-b)$, biorąc znak dolny znaczy $2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(a-b)\,\text{dos}\tfrac{1}{2}c$, przez co wypadają dwa równania

$$wst\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{dos\tfrac{1}{2}C}{wst\,C}\cdot 2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}(a-b) \text{ i}$$

$$wst\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{dos\tfrac{1}{2}C}{wst\,c}\cdot 2\,wst\tfrac{1}{2}(a-b)\,dos\tfrac{1}{2}c, \text{ gdy zaś}$$

namocy wzoru (24) $wst\,c = 2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c$ więc jeszcze

$$wst\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2\,dos\tfrac{1}{2}C.\ wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}(a-b)}{2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c} \text{ albo } wst\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{dos\tfrac{1}{2}(a-b)}{dos\tfrac{1}{2}c}\,dos\tfrac{1}{2}C \ldots (K)$$

$$\text{i } wst\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{2\,dos\tfrac{1}{2}C\,wst\tfrac{1}{2}(a-b)\,dos\tfrac{1}{2}c}{2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c} \text{ albo } wst\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{wst\tfrac{1}{2}(a-b)}{wst\tfrac{1}{2}c}\,dos\tfrac{1}{2}C \ldots (K')$$

Dodajmy dalej i odejmijmy wzory (A) i (A') wypada

$$dos\tfrac{1}{2}A\,dos\tfrac{1}{2}B \pm wst\tfrac{1}{2}A\,wst\tfrac{1}{2}B = \frac{wst\tfrac{1}{2}C}{wst\,c}\left\{wst\tfrac{1}{2}(a+b+c) \pm wst\tfrac{1}{2}(a+b-c)\right\} \ldots (m)$$

Pierwsza strona, biorąc raz znaki dolny a drugi raz górny namocy wzorów (23) i (22) znaczy $dos\tfrac{1}{2}(A+B)$ i $dos\tfrac{1}{2}(A-B)$ drugiej zaś strony część pomiędzy nawiasem brana raz z dol[illegible] nym a drugi raz górnym znakiem znaczy, namocy (64) i (65) $2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}(a+b)$ i $2\,wst\tfrac{1}{2}(a+b)\,dos\tfrac{1}{2}c$, a gdy jeszcze $wst\,c = 2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c$ więc równanie (m) przechodzi w dwa następujące

$$dos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{2.\ wst\tfrac{1}{2}C\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}(a+b)}{2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c} \text{ albo } dos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{dos\tfrac{1}{2}(a+b)}{dos\tfrac{1}{2}c}\,wst\tfrac{1}{2}C \ldots (K'')$$

$$\text{i } dos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{2\,wst\tfrac{1}{2}C\,wst\tfrac{1}{2}(a+b)\,dos\tfrac{1}{2}c}{2\,wst\tfrac{1}{2}c\,dos\tfrac{1}{2}c} \text{ albo } dos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{wst\tfrac{1}{2}(a+b)}{wst\tfrac{1}{2}c}\,wst\tfrac{1}{2}C \ (K''')$$

Wzory (K) (K') (K'') (K''') znane są pod nazwiskiem wzorów Delambrea albo Gaussa, szczególniej w astronomii są wielkiego użycia

117 Ze wzorów Gaussa dają się teraz bardzo łatwo otrzymać Analogie Neperowskie, jakoż dzieląc wzór (K) przez (K''), (K') przez (K''') dalej (K''') przez (K'') i (K') przez (K) wypada

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\mathrm{dos}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Cdos}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\,\mathrm{dost}\,\tfrac{1}{2}C \ldots \\
2)\ \mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\,\mathrm{dost}\,\tfrac{1}{2}C \ldots \\
3)\ \mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\mathrm{Cdos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Cdos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}c \\
4)\ \mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\,\mathrm{Sty}\,\tfrac{1}{2}c
\end{array}\right\}\ (137)$$

118. Ze wzorów dotąd otrzymanych wyprowadzimy jeszcze te, które służą w szczególnym przypadku, kiedy jeden z kątów trójkąta kulistego jest prosty. Założ we wzorze (130) założywszy iż $A = 90$ jest $\mathrm{Cdos}\,A = \mathrm{dos}\,90 = 0$ i cały wzór przechodzi w

$$(138)\quad \mathrm{Cdos}\,a = \mathrm{Cdos}\,b\,\mathrm{dos}\,c.$$

Położywszy dalej we wzorach (131) $A=90$ jest $\mathrm{wst}\,A = \mathrm{wst}\,90 = 1$ przez co wypada $\frac{1}{\mathrm{wst}\,a} = \frac{\mathrm{wst}\,B}{\mathrm{wst}\,b}$ i $\frac{1}{\mathrm{wst}\,a} = \frac{\mathrm{wst}\,C}{\mathrm{wst}\,c}$ albo

$$(139)\quad \mathrm{wst}\,B = \frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{wst}\,a} \quad \text{i} \quad \mathrm{wst}\,C = \frac{\mathrm{wst}\,c}{\mathrm{wst}\,a}.$$

Jeżeli zaś we wzorze (132) położymy $A=90°$ będzie $\mathrm{dost}\,A = \mathrm{dost}\,90 = 0$, a zatem jest $\mathrm{dost}\,a\,\mathrm{wst}\,b = \mathrm{dos}\,C\,\mathrm{dost}\,b$ albo $\mathrm{dos}\,C = \mathrm{dost}\,a\,\frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{dost}\,b}$ lub $\mathrm{dos}\,C = \mathrm{dost}\,a\,\mathrm{Sty}\,b = \frac{\mathrm{Sty}\,b}{\mathrm{Sty}\,a}$ (§ 15) zamieniając zaś jeszcze C na B i c na b wypada

$$(140)\quad \mathrm{dos}\,B = \frac{\mathrm{Sty}\,c}{\mathrm{Sty}\,a} \quad \text{i} \quad \mathrm{dos}\,C = \frac{\mathrm{Sty}\,b}{\mathrm{Sty}\,a}$$

W tymże samym wzorze założywszy $C = 90°$, dla $\mathrm{wst}\,C = 1$ i $\mathrm{dos}\,C = 0$ otrzymujemy $\mathrm{dost}\,a\,\mathrm{wst}\,b = \mathrm{dost}\,A$ albo $\frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{Sty}\,a} = \frac{1}{\mathrm{Sty}\,A}$ (§ 15) skąd $\mathrm{Sty}\,A = \frac{\mathrm{Sty}\,a}{\mathrm{wst}\,b}$ zamieniając zaś A i a raz na B i b drugi raz na C i c kiedyż b raz na c a drugi raz na b jest

$$(141)\quad \mathrm{Sty}\,B = \frac{\mathrm{Sty}\,b}{\mathrm{wst}\,c} \qquad \mathrm{Sty}\,C = \frac{\mathrm{Sty}\,c}{\mathrm{wst}\,b}.$$

Nakoniec we wzorze (133) założywszy $C=90°$ dla $wst C=1$ i $dos C=0$, wypada $dos A = wst B\, dos a$ i zamieniając A i a na C i c kolejno na B i b, ale i B na C ~~we~~ będzie

$$(142)\quad dos b = \frac{dos B}{wst C} \qquad dos c = \frac{dos C}{wst B}$$

założywszy zaś $A = 90°$ dla $dos A = 0$ wypada

$$0 = - dos B\, dos C + wst B\, wst C\, dos a \text{ albo}$$

$$(143)\quad dos a = dot B\, dot C$$

119. Można także otrzymać wzory do rozwiązania trójkąta w przypadku, kiedy jeden jego bok ma $90°$. Niech bok a wynosi $90°$, wtedy we wzorze (133) założywszy $a = 90°$ dla $dos a = 0$ wypada

$$(144)\quad dos A = - dos B\, dos C$$

założywszy zaś we wzorze (131) $a = 90$. dla $wst a = 1$ jest

$$(145)\quad wst b = \frac{wst B}{wst A} \;;\; wst c = \frac{wst C}{wst A}$$

Dalej we wzorze (132) uczyniwszy $a = 90°$, dla $dot a = 0$, mamy $0 = dot A\, wst C + dos C\, dot b$ albo $dos b = - dot A\, sty C$ albo

$$(146)\quad dos b = - \frac{sty C}{sty A} \;;\; dos c = - \frac{sty B}{sty A};$$

założywszy zaś w tym samym wzorze $b = 90°$, lub dla uniknienia przemiany głosek we wzorze jemu podobnym $dot c\, wst a = dot C\, wst B + dos B\, dos a$ położywszy $a = 90°$, gdy $wst a = 1$ a $dos a = 0$, mamy $dot c = dot C\, wst B$ albo $dot c = \frac{wst B}{sty C}$ względnie $sty c = \frac{sty C}{wst B}$ i mamy

$$(147)\quad sty b = \frac{sty B}{wst C} \text{ i } sty c = \frac{sty C}{wst B}.$$

Jeszcze we wzorze (130) lub jemu podobnym $dos\,b = dos\,a\,dos\,c + wrt\,a\,wrt\,c\,dos\,B$ połóżmy $a = 90°$, gdy $dos\,a = 0$ a $wrt\,a = 1$ więc $dos\,b = wrt\,c\,dos\,B$ zkąd

$$(148)\quad dos\,B = \frac{dos\,b}{wrt\,c} \quad i \quad dos\,C = \frac{dos\,c}{wrt\,b}.$$

położywszy zaś w nim samym $a = 0$ gdy $dos\,a = 0$ wypada

$$0 = dos\,b\,dos\,c + wrt\,b\,wrt\,c\,dos\,A \text{ albo}$$

$$(149)\quad dos\,A = -\,dot\,b\,dot\,c.$$

120. Otrzymane wzory 130–133 przedstawiają się pod taką postacią, iż nie można do nich stosować logarytmów; chcąc zaś to uskutecznić, należy wprowadzić tako nazwany kąt pomocniczy, który znowu tak się dobiera, iżby wzór dany, po wprowadzeniu w niego linii trygonometrycznej tegoż kąta pomocniczego, z łatwością mógł być użyty do logarytmów. W ogólności wprowadzenie kąta pomocniczego zależy od sposobu, którym się teraz zajmiemy. Niech będzie $x = P\,wrt\,\alpha \pm Q\,dos\,\alpha$ (m) gdzie P i Q mogą być jakiekolwiek wyrażenia algebraiczne lub trygonometryczne. Mamy najprzód $x = P\left(wrt\,\alpha \pm \frac{Q}{P}\,dos\,\alpha\right) = Q\left(\frac{P}{Q}\,wrt\,\alpha \pm dos\,\alpha\right)$ teraz nazwijmy $\frac{Q}{P} = sty\,\varphi$ a tem samem będzie $\frac{P}{Q} = dot\,\varphi$ co wprowadziwszy w nasze równanie mamy

$$x = P(wrt\,\alpha \pm sty\,\varphi\,dos\,\alpha) = Q(dot\,\varphi\,wrt\,\alpha \pm dos\,\alpha) \text{ albo}$$

$$x = P\left(wrt\,\alpha \pm \frac{wrt\,\varphi}{dos\,\varphi}\,dos\,\alpha\right) = Q\left(\frac{dos\,\varphi}{wrt\,\varphi}\,wrt\,\alpha \pm dos\,\alpha\right) \text{ albo}$$

$$x = P\left(\frac{wrt\,\alpha\,dos\,\varphi \pm wrt\,\varphi\,dos\,\alpha}{dos\,\varphi}\right) = Q\left(\frac{wrt\,\alpha\,dos\,\varphi \pm wrt\,\varphi\,dos\,\alpha}{wrt\,\varphi}\right) \text{ albo}$$

$$x = \frac{P\,wrt(\alpha \pm \varphi)}{dos\,\varphi} = \frac{Q\,wrt(\alpha \pm \varphi)}{wrt\,\varphi}$$ obadwa wyrażenia

zdatne do stosowania logarytmów.

Gdyby znowu był $x = P \cos\alpha \pm Q \sin\alpha$ (n), wtedy mielibyśmy

$$x = P\left(\cos\alpha \pm \frac{Q}{P}\sin\alpha\right) = Q\left(\frac{P}{Q}\cos\alpha \pm \sin\alpha\right)$$ a założywszy $\frac{Q}{P} = \operatorname{tg}\varphi'$ będzie $\frac{P}{Q} = \operatorname{cot}\varphi'$ a tem samem

jest $$x = P\left(\cos\alpha \pm \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\sin\alpha\right) = Q\left(\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}\cos\alpha \pm \sin\alpha\right)$$

albo $$x = P\left(\frac{\cos\alpha\cos\varphi' \pm \sin\alpha\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right) = Q\left(\frac{\cos\alpha\cos\varphi' \pm \sin\alpha\sin\varphi'}{\sin\varphi'}\right)$$

albo $$x = \frac{P\cos(\alpha \mp \varphi')}{\cos\varphi'} = \frac{Q\cos(\alpha \mp \varphi')}{\sin\varphi'}$$ wyrażenia znowu zdatne do użycia logarytmów

Lecz można także w równaniu (m) połozyć $\frac{Q}{P} = \operatorname{cot}\psi$ wtedy będzie $\frac{P}{Q} = \operatorname{tg}\psi$ i jest

$$x = P\left(\frac{\sin\alpha\sin\psi \pm \cos\alpha\cos\psi}{\sin\psi}\right) = Q\left(\frac{\sin\alpha\sin\psi \pm \cos\alpha\cos\psi}{\cos\psi}\right)$$

albo $$x = \pm P\left(\frac{\cos\alpha\cos\psi \pm \sin\alpha\sin\psi}{\sin\psi}\right) = \pm Q\left(\frac{\cos\alpha\cos\psi \pm \sin\alpha\sin\psi}{\cos\psi}\right)$$

albo $$x = \pm\frac{P\cos(\alpha \mp \psi)}{\sin\psi} = \pm\frac{Q\cos(\alpha \mp \psi)}{\cos\psi}$$

Połozywszy zaś we wzorze (n) $\frac{Q}{P} = \operatorname{cot}\psi'$ jest $\frac{P}{Q} = \operatorname{tg}\psi'$

a tem samem $$x = P\left(\frac{\cos\alpha\sin\psi' \pm \sin\alpha\cos\psi'}{\sin\psi'}\right) = Q\left(\frac{\cos\alpha\sin\psi' \pm \sin\alpha\cos\psi'}{\cos\psi'}\right)$$

albo $$x = \frac{P\sin(\alpha \pm \psi')}{\sin\psi'} = \frac{Q\sin(\alpha \pm \psi')}{\cos\psi'}$$ Wzory znowu zdatne do działania z logarytmami

Tym sposobem użyć można przy danym wzorze któregokolwiek postępowania, zważając jedynie na to, które jest prostsze lub dogodniejsze. Zupełna wreszcie w tem, jak widzimy, jest dowolność czy P lub Q bierze się za naprzód: czy następnie $\frac{Q}{P}$ mazuje się styczną lub dotyczną kąta pośredniego.

121. Przystąpmy już teraz do rozwiązania trójkątów kulistych czyli
do wynalezienia za pomocą rachunku trzech części trójkąta,
które trzy inne są dane i zacznijmy najpierwej od trójkątów,
w których kąt A jest prosty dwa inne jakiekolwiek B i C,
nazwijmy przeciwprostokątną przez a, dwa inne boki przeciw-
ne kątom B. C. przez b i c. —

Trójkąt kulisty może mieć wszystkie trzy kąty proste, lecz
wtedy boki jego mają po 90°. Dalej może mieć dwa kąty
proste a wtedy we wzorze (143) $\cos a = \cot B \cot C$ położywszy
jeszcze i $B = 90°$, gdy $\cot B = 0$, jest $\cos a = 0$; skąd się poka-
zuje iż $a = 90°$, że zaś naprzeciw równych kątów leżą równe
boki, więc także $b = a = 90°$. Co się tycze kąta C i boku c
położymy we wzorze (142) i kąt $B = 90°$, jest $\cos c = \cos C$, czyli
$C = c$. Dosyć więc w tym drugim przypadku mieć wiadomy
boku c albo kąt C, aby trójkąt był rozwiązany. —

122. Jeżeli zaś jeden tylko kąt A jest prosty, wtedy zdarzyć się
mogą następujące przypadki
1. Dana jest przeciwprostokątna a i bok b. wynaleźć kąty
B. C i bok c. Do tego, po przywróceniu promienia (§ 58), mamy
wzory $\sin B = \frac{R \sin b}{\sin a}$ (139), $\cos C = \frac{R \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$ (140), $\cos c = \frac{R \cos a}{\cos b}$ (138)
Kąt C i bok c nie przedstawiają żadnej wątpliwości, ponie-
waż wynajdują się przez cosinusy, które, gdy wypadną
dodatnie odpowiadają łukom mniejszym od 90°, gdy wypadną
ujemne odpowiadają łukom większym od 90° co się zaś
tycze kąta B powinien być tegoż samego rodzaju co b dane.

2. Dane są boki b. c, wynaleźć przeciwprostokątną a i obydwa kąty B. C. Do tego mamy następujące równania.

$\text{dos}\,a = \frac{\text{dos}\,b\,\text{dos}\,c}{R}$ (138), $\text{sty}\,B = \frac{R\,\text{sty}\,b}{\text{wst}\,c}$ (141) $\text{sty}\,C = \frac{R\,\text{sty}\,c}{\text{wst}\,b}$ (141)

w tym przypadku nie zachodzi żadna wątpliwość.

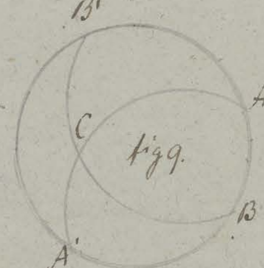
3. Dana jest przeciwprostokątna i jeden kąt B, wynaleźć oba boki b. c, i kąt C. Do tego służą wzory.

$\text{wst}\,b = \frac{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,B}{R}$ (139), $\text{sty}\,c = \frac{\text{sty}\,a\,\text{dos}\,B}{R}$ (140) $\text{dot}\,C = \frac{R\,\text{dos}\,a}{\text{dot}\,B}$ (143)

C i c nie przedstawiają wątpliwości, co się tycze b. ten bowiem jest tej samej natury co dany kąt przeciwny B.

4. Dane są boki b i kąt przeciwny B wynaleźć boki a. c i kąt C. Do tego mamy równania.

$\text{wst}\,a = \frac{R\,\text{wst}\,b}{\text{wst}\,B}$ (139) $\text{wst}\,c = \frac{R\,\text{sty}\,b}{\text{sty}\,B}$ (141) $\text{wst}\,C = \frac{R\,\text{dos}\,B}{\text{dos}\,b}$ (142)



W tym przypadku trzy przewiastki trójkąta dane są przez wstawy, więc pytanie zdolne jest przyjąć dwie odpowiedzi. Jakoż widoczna jest rzecz, że obadwa trójkąty ABC i AB'C są prostokątne przy A, mają bok wspólny AC=b, i też same kąty przeciwne B=B'. † Podwójne więc wartości powinny być tak ułożone aby C i c były tej samej natury; nakoniec b i c służą do oznaczenia natury a przez wzgląd na równanie $\text{dos}\,a = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,c$. lecz zawsze wartość a wyznacza się ze równania (139)

---

† jako mierzące pochyłość tych samych dwóch płaszczyzn BCB', BAB'.

5. Dany jest bok b i kąt przyległy C, wynaleźć bok c, przeciwprostokątną a i kąt B. Do rozwiązania tego pytania mamy równania

$$\operatorname{stg} a = \frac{R \operatorname{stg} b}{\operatorname{dos} C} \ (140), \quad \operatorname{stg} c = \frac{\operatorname{wst} b \operatorname{stg} C}{R} \ (141) \quad \operatorname{dos} B = \frac{\operatorname{dos} b \operatorname{wst} C}{R} \ (142)$$

Tu nie ma także żadnej wątpliwości. —

6. Dane są kąty B. C: wynajdziemy trzy boki przez następujące równania

$$\operatorname{dos} a = \frac{\operatorname{dot} B \operatorname{dot} C}{R} \ (143) \quad \operatorname{dos} b = \frac{R \operatorname{dos} B}{\operatorname{wst} C} \ (142), \quad \operatorname{dos} c = \frac{R \operatorname{dos} C}{\operatorname{wst} B} \ (142)$$

i tu niema żadnej wątpliwości. —

123. Lubo trójkąt kulisty mający jeden bok równy 90° może być na podobieństwo trójkąta prostokątnego rozwiązany, przez uważanie trójkąta biegunowego; gdyż nazwawszy kąty przez A. B. C boki przez a = 90° b. c. danego trójkąta a kąty trójkąta biegunowego jemu odpowiadającego przez A', B', C', boki przez a', b', c' to mamy

$$\#\begin{cases} A' = 180° - a = 180° - 90° \\ B' = 180° - b. \\ C' = 180° - c \end{cases} \qquad \begin{rcases} a' = 180° - A \\ b' = 180° - B \\ c' = 180° - C \end{rcases} \ \#'$$

zkąd się pokazuje, że trójkąt biegunowy jest prostokątny i jeżeli będą dane dwa przeciwiastki trójkąta ABC, to przez równania #. i #' dadzą dwa przeciwiastki trójkąta A'B'C', który rozwiązawszy jako trójkąt prostokątny; ze równań # i #' znajdziemy znowu z danych przeciwiastki trójkąta ABC. czyli go rozwiążemy; to przecież podobny trójkąt rozwiązuje się także wprost przez wzory podane w ustępie (119). a w którym żadnej się też same przypadki, co i przy rozwiązaniu trójkąta prostokątnego

nego, zachowawszy więc też same ostrożności co się dotycze wątpliwości kątów, żądane przemiarkli trój„ kąta zawsze oznaczone zostaną.

124. Przystąpmy nakoniec do rozwiązania trójkątów kuli„ stych ukośnokątnych.

1. Dane są trzy boki trójkąta a. b. c; wynajdują się trzy kąty przez wzory (134). w których należy przywrócić promień. W tym przypadku nie ma żadnej wątpliwości nawet używając wzorów na wstawy, bo gdy ~~boki~~ kąty trój„ kąta nieprzechodzą 180° ~~[illegible]~~, więc połowy tych kątów zawsze są mniejsze od 90°. —

125. Gdy dane są dwa boki a i b i kąt przeciwny A, wynaj„ dziemy bok c i kąty B i C jak następuje.

Najprzód kąt B ze zrównania $\text{wrt}B = \frac{\text{wrt}A\,\text{wrt}b}{\text{wrt}a}$ (131)

kąt C ze zrównania $\text{dot}A\,\text{wrt}C + \text{dos}C\,\text{dos}b = \text{dot}a\,\text{wrt}b$ (132)

które należy przerobić według § 120. Jakoż wziąwszy $\text{dot}A$ za nawias mamy $\text{dot}A\left\{\text{wrt}C + \frac{\text{dos}b}{\text{dot}A}\text{dos}C\right\} = \text{dot}a.\text{wrt}b$

i nazwawszy $\frac{\text{dos}b}{\text{dot}A} = \text{dos}b\,\text{sty}A = \text{sty}\varphi$ (m) będzie

$$\text{dot}A\left\{\frac{\text{wrt}C\,\text{dos}\varphi + \text{wrt}\varphi\,\text{dos}C}{\text{dos}\varphi}\right\} = \text{dot}a\,\text{wrt}b \text{ albo}$$

$$\text{dot}A\,\frac{\text{wrt}(C+\varphi)}{\text{dos}\varphi} = \text{dot}a\,\text{wrt}b \text{ zkąd } \text{wrt}(C+\varphi) = \frac{\text{dot}a.\text{wrt}b.\text{dos}\varphi}{\text{dot}A} \quad (g)$$

albo uprzątając za pomocą (m) gdy $\frac{\text{wrt}\varphi}{\text{dos}\varphi} = \text{dos}b\,\text{sty}A$

więc $\text{dos}\varphi = \frac{\text{wrt}\varphi}{\text{dos}b\,\text{sty}A} = \frac{\text{wrt}\varphi\,\text{dot}A}{\text{dos}b}$, którą wartość podsta„ wiwszy w (g) za $\text{dos}\varphi$ wypada jeszcze $\text{wrt}(C+\varphi) = \frac{\text{dot}a.\text{wrt}b\,\text{wrt}\varphi\,\text{dot}A}{\text{dot}A\,\text{dos}b}$

albo $\text{wrt}(C+\varphi) = \text{sty}b\,\text{wrt}\varphi\,\text{dot}a = \frac{\text{sty}b\,\text{wrt}\varphi}{\text{sty}a}$, Mamy

więc dla obrachowania kąta C równania

$$wst(C+\varphi) = \frac{Sty\, b\, wst\, \varphi}{Sty\, a} \quad i \quad Sty\,\varphi = \frac{dos\, b\, Sty\, A}{R}.$$

Bok c wynajduje się albo ze wzoru $wst\, c = \frac{wst\, a\, wst\, C}{wst\, A}$ albo ze zrównania $dos\, b\, dos\, c + wst\, b\, wst\, c\, dos\, A = R\, dos\, a$ (130), i jakoż biorąc dos b za nawias jest $dos\, b \left\{ dos\, c + \frac{wst\, b\, dos\, A}{dos\, b} wst\, c \right\} = dos\, a$ a założywszy $Sty\,\varphi = \frac{wst\, b\, dos\, A}{dos\, b} = Sty\, b\, dos\, A$, mamy

$$dos\, b\, \frac{dos(c-\varphi)}{dos\,\varphi} = dos\, a, \text{ z kąd } dos(c-\varphi) = \frac{dos\, a\, dos\,\varphi}{dos\, b}$$

Jest więc dla obrachowania boku c dwa równania

$$R\, dos(c-\varphi) = \frac{dos\, a.\, dos\,\varphi}{dos\, b} \quad i \quad Sty\,\varphi = \frac{Sty\, b\, dos\, A}{R}$$

W tym przypadku rozwięzywania trójkąta kulistego mogą wypaść dwa trójkąty podobnie jako w trójkątach prostolinijnych.

126. § Dane są dwa boki b, c, i kąt zawarty A, należy wynaleźć dwa kąty B, C, i bok a.

Kąty B i C dadzą się wynaleźć przez dwa następujące równania

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} dot\, b\, wst\, c = dot\, B\, wst\, A + dos\, A\, dos\, c \\ dot\, c\, wst\, b = dot\, C\, wst\, A + dos\, A\, dos\, b. \end{array} \right\} (\S\, 111)$$

Jakoż mamy $dot\, B\, wst\, A = dot\, b\, wst\, c - dos\, A\, dos\, c = dot\, b \left(wst\, c - \frac{dos\, A\, dos\, c}{dot\, b} \right)$

i położywszy $Sty\,\varphi = \frac{dos\, A}{dot\, b} = Sty\, b\, dos\, A$ jest

$$dot\, B\, wst\, A = \frac{dot\, b\, wst(c-\varphi)}{dos\,\varphi} \text{ z kąd } dot\, B = \frac{dot\, b\, wst(c-\varphi)}{dos\,\varphi\, wst\, A}, \text{ albo}$$

$Sty\, B = \frac{dos\,\varphi\, wst\, A\, Sty\, b}{wst(c-\varphi)}$ kładąc zaś wartość na Sty b ze zrównania poprzedniego, wypada $Sty\, B = \frac{\frac{dos\,\varphi .\, Sty\,\varphi\, wst\, A}{dos\, A}}{wst(c-\varphi)}$, albo

więc dla kąta B ~~albo~~ jest $\text{sty}B = \frac{\text{sty}A\ \text{wrt}\varphi}{\text{wrt}(c-\varphi)}$ i $\text{sty}\varphi = \frac{\text{sty}b\ \text{dos}A}{R}$.

przemieniwszy B na C i c na b znajdziemy wzór dla C, który także otrzymuje się z drugiego równania (x) i będzie

$$\text{sty}C = \frac{\text{sty}A\ \text{wrt}\varphi'}{\text{wrt}(b-\varphi')}\ \text{i}\ \text{sty}\varphi' = \frac{\text{sty}c\ \text{dos}A}{R}.$$

Co się tycze boku a ten wynajdujemy ze zrównania

$$\text{dos}a = \text{dos}b\ \text{dos}c + \text{wrt}b\ \text{wrt}c\ \text{dos}A,$$ jakoż ostatnie równanie poprzedzającego ustępu daje;

$$R\,\text{dos}a = \frac{R\,\text{dos}b}{R\,\text{dos}\varphi}\text{dos}(c-\varphi)\ \text{przy czem}\ \text{sty}\varphi = \frac{\text{sty}b\ \text{dos}A}{R}.$$

Wszakże w tym przypadku kąty B i C mogą być także wynalezione zapomocą Analogij Neperowskich

$$\left.\begin{aligned}\text{sty}\tfrac{1}{2}(B+C) &= \frac{\text{dos}\tfrac{1}{2}(b-c)}{R\,\text{dos}\tfrac{1}{2}(b+c)}\,\text{dol}\tfrac{1}{2}A\\ \text{sty}\tfrac{1}{2}(B-C) &= \frac{\text{wrt}\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{wrt}\tfrac{1}{2}(b+c)}\,\text{dol}\tfrac{1}{2}A\end{aligned}\right\}(37)$$

127. Dane są dwa kąty A i B i bok c wynaleźć dwa inne boki a, b. i kąt C.

Boki a i b wynajdujemy ze zrównań,

$$\text{dol}a\ \text{wrt}c = \text{dol}A\ \text{wrt}B + \text{dos}B\ \text{dos}c\ \text{i}$$

$$\text{dol}b\ \text{wrt}c = \text{dol}B\ \text{wrt}A + \text{dos}A\ \text{dos}c.$$ Jakoż pierwsze daje

$$\text{dol}a\ \text{wrt}c = \text{dol}A\left(\text{wrt}B + \text{dos}B\,\frac{\text{dos}c}{\text{dol}A}\right)$$ i położywszy $\text{dol}\varphi = \frac{\text{dos}c}{\text{dol}A} =$

$= \text{dos}c\ \text{sty}A$, mamy $\text{dol}a\ \text{wrt}c = \frac{\text{dol}A\ \text{dos}(B-\varphi)}{\text{wrt}\varphi}$

zkąd $\text{dol}a = \frac{\text{dol}A\ \text{dos}(B-\varphi)}{\text{wrt}\varphi\ \text{wrt}c}$ albo $\text{sty}a = \frac{\text{wrt}\varphi\ \text{wrt}c\ \text{sty}A}{\text{dos}(B-\varphi)}$,

albo upraszczając zapomocą równania pośiłkowego,
wypada dla boku a; $sty\,a = \frac{dos\,\varphi\, sty\,c}{dos(B-\varphi)}$ i $dot\,\varphi = \frac{dos\,c\, sty\,A}{R}$.
Podobnie znajdziemy $sty\,b = \frac{dos\,\varphi'\, sty\,c}{dos(A-\varphi')}$ i $dot\,\varphi' = \frac{dos\,c\, sty\,B}{R}$.
Dla wynalezienia kąta C mamy równanie

$$dos\,C = -dos\,B\, dos\,A + wst\,A\, wst\,B\, dos\,c$$ z którego jest

$$dos\,C = dos\,B\left(-dos\,A + wst\,A\,\frac{wst\,B\, dos\,c}{dos\,B}\right)$$ i ponieważ

$$dot\,\varphi' = dos\,c\, sty\,B$$ jest

$$dos\,C = \frac{dos\,B\, wst(A-\varphi')}{wst\,\varphi'}.$$

Wreszcie boki a i b dadzą się wynaleźć z analogij Neperowskich,
$$sty\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{dos\frac{1}{2}(A-B)}{dos\frac{1}{2}(A+B)}\, sty\tfrac{1}{2}c$$

$$sty\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{wst\frac{1}{2}(A-B)}{wst\frac{1}{2}(A+B)}\, sty\tfrac{1}{2}c$$

Ten i poprzedzający przypadek nie przedstawiają wątpliwości

128. Dane są dwa kąty A. B i bok przeciwny a wynaleźć dwa inne boki b, c i kąt C.

Bok b wynajdujemy ze zrównania $wst\,b = \frac{wst\,a\, wst\,B}{wst\,A}$

Bok c ze zrównania $dot\,a\, wst\,c - dos\,B\, dos\,c = dot\,A\, wst\,B$

albo $dot\,a\left(wst\,c - \frac{dos\,B}{dot\,a}\, dos\,c\right) = dot\,A\, wst\,B$ i kładąc

$sty\,\varphi = dos\,B\, sty\,a$ mamy $\frac{dot\,a\, wst(c-\varphi)}{dos\,\varphi\, wst\,B} = dot\,A$ albo

$sty\,A = \frac{dos\,\varphi\, wst\,B\, sty\,a}{wst(c-\varphi)}$ upraszczając jest $sty\,A = \frac{wst\,\varphi\, sty\,B}{wst(c-\varphi)}$

skąd $wst(c-\varphi) = \frac{wst\,\varphi\, sty\,B}{sty\,A}$

Nareszcie kąt C wynajduje się ze równania

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \text{albo}$$

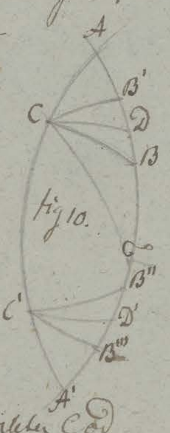
$$\cos A = \cos B\left(-\cos C + \frac{\sin B \cos a}{\cos B} \sin C\right) \quad \text{założywszy zaś}$$

$$\cot \varphi = \cos a \operatorname{tg} B \quad \text{będzie}$$

$$\cos A = \frac{\cos B \sin(C-\varphi)}{\sin \varphi} \quad \text{skąd} \quad \sin(C-\varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Tu zdarzyć się łatwo mogą dwa wypadki po rozwiązaniu

129. Dane są trzy kąty A. B. C. Wynaleźć trzy boki a. b. c.
Do wynalezienia w tym przypadku trzech boków mamy gotowe wzory (135)
Łatwo tu spostrzedz się daje, że z tych sześciu przypadków rozwiązania trójkąta kulistego, trzy ostatnie dają się wyprowadzić z trzech pierwszych przez uważanie względnego trójkąta biegunowego, dla tej zaś przyczyny, trzy tylko ogólne przypadki zachodzić w rozwiązaniu trójkątów kulistych. Z których pierwszy i trzeci nie przedstawiają żadnej wątpliwości, gdy znowu drugi niekiedy daje dwa wypadki czyli dwa rozwiązania. —



130. Aby się przekonać który w przypadku objętym (§ 125) odpowiadają rozwiązaniu dwa albo tylko jeden trójkąt, uważajmy najprzód, że kąt A < 90°. Przedłużmy dwa boki AB, AC aż do przecięcia się przeciwnego w A'. Jeżeli weźmiemy AC < 90° i spuścimy prostopadłą CD na AB, obadwa boki AC i CD trójkąta prostokątnego będą mniejsze od 90°, nadto CD jest odległością najkrótszą punktu C od

AB a wziąwszy $DB' = DB$, pochyłe CB' CB są równe, tem zaś będą większe, im bardziej oddalać się będą od punktu D — Stąd będzie $AC = b$. $CB = a$, tu się daje widzieć że trójkąt, w którym jest $A < 90°$, $b < 90°$ i $a < b$ koniecznie przypuszcza dwa wypadki czyli dwa rozwiązania ACB, ACB'; lecz przypuszczając zawsze A i b mniejsze od $90°$, jeżeli jest $a > b$ wypadnie tylko jeden trójkąt ACE, gdyż druga pochyła równa CE już się nie zmieści pomiędzy A i D —

Uważajmy powtóre $AC' > 90°$, spuściwszy prostopadłą $C'D'$ na ABA' będzie znowu $C'D' < A'C'$ a tak $C'B'''$ poprowadzony pomiędzy D' i A' jest $> C'D' < A'C'$; — więc wziąwszy $AC' = b$, $C'B'' = C'B''' = a$, widzimy, iż kiedy $A < 90°$ a $b > 90°$ wypadają po rozwiązaniu dwa trójkąty, skoro $a + b < 180°$; wypada zaś tylko jeden, skoro $a + b > 180°$, ponieważ wtedy punkt B''' przypadnie za punkt A'. Roztrząsając podobnie kiedy kąt. $A > 90°$, można będzie ustanowić następujące oznaki, według których trójkąt. w przypadku który uważamy, daje ~~dwa~~ dwie odpowiedzi lub jedną.

$A < 90°$ $b < 90°$ $\begin{cases} a > b & \text{jedna odpowiedź} \\ a < b & \text{dwie odpowiedzi} \end{cases}$

$A < 90°$ $b > 90°$ $\begin{cases} a + b > 180° & \text{jedna odpowiedź} \\ a + b < 180° & \text{dwie odpowiedzi} \end{cases}$

$A > 90°$ $b < 90°$ $\begin{cases} a + b > 180° & \text{dwie odpowiedzi} \\ a + b < 180° & \text{jedna odpowiedź} \end{cases}$

$A > 90°$ $b > 90°$ $\begin{cases} a > b & \text{dwie odpowiedzi} \\ a < b & \text{jedna odpowiedź} \end{cases}$ —

Jeżeli $A = 90°$ będzie jedna odpowiedź czy $a = b$ lub $a + b = 180°$, będzie zaś dwie jeżeli $b = 90°$

131. Też same wypadki dadzą się zastosować do przypadku opisanego w § 128, przeprowadziwszy je przez trójkąt trigonowy, a wtedy otrzymamy oznaki, według których będzie można osądzić kiedy dane A. B. a dają dwie odpowiedzi a kiedy jedną. Jakoż mamy

$a > 90^\circ \ B > 90^\circ \begin{cases} A < B & \text{jedna odpowiedź} \\ A > B & \text{dwie odpowiedzi} \end{cases}$

$a > 90^\circ \ B < 90^\circ \begin{cases} A+B < 180^\circ & \text{jedna odpowiedź} \\ A+B > 180^\circ & \text{dwie odpowiedzi} \end{cases}$

$a < 90^\circ \ B > 90^\circ \begin{cases} A+B < 180^\circ & \text{dwie odpowiedzi} \\ A+B > 180^\circ & \text{jedna odpowiedź} \end{cases}$

$a < 90^\circ \ B < 90^\circ \begin{cases} A < B & \text{dwie odpowiedzi} \\ A > B & \text{jedna odpowiedź} \end{cases}$

Wypada tylko jedna odpowiedź kiedy jest $a = 90^\circ$ albo $A = B$ albo $A + B = 180^\circ$ — wypadkie dwie kiedy $B = 90^\circ$

132. W każdym przypadku aby się pozbyć odpowiedzi najpotrzebnych: fałszywych, należy pamiętać 1º że każdy bok jakolwiek i każdy kąt powinien być mniejszy od 180º, 2º że największe kąty leżą naprzeciw największych boków w ten sposób, iż kiedy jest $A > B$ musi być także koniecznie $a > b$ i przeciwnie. —

133. Teraz podamy sposoby rozwiązania trójkąta kulistego w szczególnych przypadkach, jakie się zdarzyć mogą z powodu 2 boków zbliżających się do 90º lub dwóch kątów bardzo ostrych itd. wspomniemy jednakże ten wykład rozwinięciem na szereg dwóch następujących wyrażeń

$$\operatorname{tg} x = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \quad i \quad \operatorname{tg} x = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C.$$ Jakoż

obadwa te wyrażenia mogą być napisane pod po-

stąd $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}c}{(a-b)\cos\frac{1}{2}c}$; $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(a-b)\sin\frac{1}{2}c}{(a+b)\cos\frac{1}{2}c}$,

kładąc teraz za $\sin x$ i $\cos x$ wartości ze wzorów 88 : 87 po pomnożeniu obudwóch stron przez $2\sqrt{-1}$ a podzieleniu przez 2 wypada

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{(a+b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)}{(a-b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}+e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)} \; ; \; \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{(a-b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)}{(a+b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}+e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)}$$

dzieląc na pierwszej stronie licznik i mianownik przez $e^{-x\sqrt{-1}}$

wypada $\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1} = \frac{(a\pm b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)}{(a\mp b)\left(e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}+e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\right)}$. Zniósłszy mianowniki uprościwszy i wyciągnąwszy wartość na $e^{2x\sqrt{-1}}$ otrzymujemy raz

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{ae^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}} - be^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}}{ae^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}} - be^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(a-be^{-c\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(a-be^{c\sqrt{-1}}\right)}$$

drugi raz

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{ae^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}} + be^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}}{ae^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}} + be^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(a+be^{-c\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(a+be^{c\sqrt{-1}}\right)}$$

albo dzieląc licznik i mianownik na drugiej stronie przez a jest

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(1-\frac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(1-\frac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)} \quad \text{i} \quad e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(1+\frac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right)}{e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{-1}}\left(1+\frac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)}$$

biorąc teraz logarytmy [neperowskie] (pamiętajmy że $l'og\, e^{\alpha} = \alpha$), będzie

$$2x\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{-1} + l'og\left(1-\tfrac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right) - \left\{-\tfrac{1}{2}c\sqrt{-1} + l'og\left(1-\tfrac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)\right\} \quad \text{i}$$

$$2x\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{-1} + l'og\left(1+\tfrac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right) - \left\{-\tfrac{1}{2}c\sqrt{-1} + l'og\left(1+\tfrac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)\right\} \quad \text{albo}$$

$$2x\sqrt{-1} = c\sqrt{-1} + \left\{l'og\left(1-\tfrac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right) - l'og\left(1-\tfrac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)\right\} \quad (m) \quad \text{i}$$

$$2x\sqrt{-1} = c\sqrt{-1} + \left\{l'og\left(1+\tfrac{b}{a}e^{-c\sqrt{-1}}\right) - l'og\left(1+\tfrac{b}{a}e^{c\sqrt{-1}}\right)\right\} \quad (n)$$

po rozwinięciu ciągów zamkniętych pomiędzy klamrami w szeregu (m) po podzieleniu obudwóch stron przez $2\sqrt{-1}$ daje szereg (128) wstępujący i

przez 107, jest więc

(150) $x = \frac{1}{2}C + \frac{b}{a}\text{wst}\,C + \frac{b^2}{2a^2}\text{wst}\,2C + \frac{b^3}{3a^3}\text{wst}\,3C + \frac{b^4}{4a^4}\text{wst}\,4C + \text{i.t.d.}$

Co się zaś tyczy szeregu (n) należy obadwa wyrażenia zamknięte w klamrze rozwinąć według szeregu logarytmowego (§ II przypisy)

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \text{itd}$$ co daje

$$2x\sqrt{-1} = C\sqrt{-1} + \frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}} + \frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}} - \frac{b^4}{4a^4}e^{-4C\sqrt{-1}} + \dots -$$
$$- \frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}} + \frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}} + \frac{b^4}{4a^4}e^{4C\sqrt{-1}} \dots$$

albo zbierając wyrazy do siebie i dzieląc przez $2\sqrt{-1}$, jest

$$x = \frac{1}{2}C - \frac{b}{a}\left(\frac{e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{e^{2C\sqrt{-1}} - e^{-2C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) - \frac{b^3}{3a^3}\left(\frac{e^{3C\sqrt{-1}} - e^{-3C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) \dots$$

albo mając wzgląd na wzór 88

(151) $x = \frac{1}{2}C - \frac{b}{a}\text{wst}\,C + \frac{b^2}{2a^2}\text{wst}\,2C - \frac{b^3}{3a^3}\text{wst}\,3C + \frac{b^4}{4a^4}\text{wst}\,4C - \text{itd.}$

134. Rozwiążemy przypadek w którym dane są dwa boki i kąt zawarty, za pomocą szeregów. Takowe analogie Neperowskie dają

$$\text{dot}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{wst}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\text{wst}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{dot}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\text{dos}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\text{dos}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C$$ Że zaś $\text{dot}\,\frac{1}{2}(A-B) = \text{sty}\{90 - \frac{1}{2}(A-B)\}$

przeto rozwijając wstawy i dostawy według (20 – 23) mamy

$$\text{sty}\{90 - \tfrac{1}{2}(A-B)\} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}b + \text{wst}\frac{1}{2}b\,\text{dos}\frac{1}{2}a}{\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}b - \text{wst}\frac{1}{2}b\,\text{dos}\frac{1}{2}a}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C \quad \text{i}$$

$$\text{sty}\{90 - \tfrac{1}{2}(A+B)\} = \frac{\text{dos}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}b - \text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{wst}\frac{1}{2}b}{\text{dos}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}b + \text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{wst}\frac{1}{2}b}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C$$

stosując te wyrażenia do szeregów (150) i (151) i pamiętając, że w pierwszym $\frac{b}{a} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}b\,\text{dos}\frac{1}{2}a}{\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}b} = \frac{\text{sty}\frac{1}{2}b}{\text{sty}\frac{1}{2}a}$ w drugim zaś

jest $\frac{b}{a} = \frac{wst\frac{1}{2}a\; wst\frac{1}{2}b}{Dost\frac{1}{2}a\; dost\frac{1}{2}b} = \frac{Sty\frac{1}{2}b}{Dost\frac{1}{2}a}$ otrzymujemy

$$90^\circ - \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}C + \frac{Sty\frac{1}{2}b}{Sty\frac{1}{2}a}\,wst\,C + \frac{Sty^2\frac{1}{2}b}{2\,Sty^2\frac{1}{2}a}\,wst\,2C + \frac{Sty^3\frac{1}{2}b}{3\,Sty^3\frac{1}{2}a}\,wst\,3C \text{ itd}$$

$$90^\circ - \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}C - \frac{Sty\frac{1}{2}b}{Dost\frac{1}{2}a}\,wst\,C + \frac{Sty^2\frac{1}{2}b}{2\,Dost^2\frac{1}{2}a}\,wst\,2C - \frac{Sty^3\frac{1}{2}b}{3\,Dost^3\frac{1}{2}a}\,wst\,3C + \text{ itd}$$

albo ostatecznie

(152) $$\frac{A-B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}C - \frac{Sty\frac{1}{2}b}{Sty\frac{1}{2}a}\,wst\,C - \frac{Sty^2\frac{1}{2}b}{2\,Sty^2\frac{1}{2}a}\,wst\,2C - \frac{Sty^3\frac{1}{2}b}{3\,Sty^3\frac{1}{2}a}\,wst\,3C \ldots$$

(153) $$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}C + \frac{Sty\frac{1}{2}b}{Dost\frac{1}{2}a}\,wst\,C - \frac{Sty^2\frac{1}{2}b}{2\,dost^2\frac{1}{2}a}\,wst\,2C + \frac{Sty^3\frac{1}{2}b}{3\,dost^3\frac{1}{2}a}\,wst\,3C \ldots$$

Prawo tworzenia się wyrazów w tych szeregach jest bardzo proste, są one tem więcej zbiegającemi się im mniejsze jest b. Pierwszy nadto zawsze jest zbiegającym, ponieważ bierze się $b < a$; drugi także będzie jeżeli jest $Sty\frac{1}{2}b < dost\frac{1}{2}a$ albo $a+b < 180^\circ$. Jest on znowu wybiegający się, i nieużyteczny kiedy $a+b > 180^\circ$, czego jednako uniknąć można; albowiem rozwiązanie trójkąta ABC fig 9. w którym $AC+CB > 180^\circ$ zależy od rozwiązania trójkąta $A'CB'$, w którym jest $CA'+CB' < 180^\circ$. Wreszcie drugi szereg jest na najwyższym stopniu zbiegania się; gdy a i b są bardzo małe; wtedy i trzeci bok C jest także bardzo mały bo musi być $c < a+b$ i trójkąt nie wiele różni się od trójkąta prostokreślnego; w takim przypadku przewyżka summy jego kątów nad dwa kąty proste tak się wyraża

$$A+B+C-180^\circ = \frac{2}{1}Sty\frac{1}{2}a\,Sty\frac{1}{2}b\,wst\,C - \frac{2}{2}Sty^2\frac{1}{2}a\,Sty^2\frac{1}{2}b\,wst\,2C + \frac{2}{3}Sty^3\frac{1}{2}a\,Sty^3\frac{1}{2}b\,wst\,3C - \text{ itd.}$$

co także z tego drugiego szeregu po zniesieniu mianowników i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy. —

135. Do wynalezienia trzeciego boku w trójkącie mamy równanie

$\text{dos}\,c = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,b + \text{wst}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{dos}\,C$ w tem równaniu połóżmy

za dostawy i wstawy wartości 2^{ie} ustępu 78 oprócz dos C

wszędzie ~~za $2\text{dos}^2\tfrac12 + $ za dos~~ i ~~$2\text{wst}\tfrac12\text{dos}\tfrac12$ za wst~~ będzie

$$2\text{dos}^2\tfrac12 c - 1 = (2\text{dos}^2\tfrac12 a - 1)(2\text{dos}^2\tfrac12 b - 1) + 4\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 a\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\,C \text{ albo}$$

$$2\text{dos}^2\tfrac12 c - 1 = 4\text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b - 2\text{dos}^2\tfrac12 b - 2\text{dos}^2\tfrac12 a + 1 + 4\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 a\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\,C$$

przeniósłszy 1 na drugą stronę i podzieliwszy przez 2 otrzymamy

$$\text{dos}^2\tfrac12 c = 2\text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b - \text{dos}^2\tfrac12 b - \text{dos}^2\tfrac12 a + 1 + 2\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 a\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\,C$$

albo

$$\text{dos}^2\tfrac12 c = \text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b + 2\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 a\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\,C + \{1 - \text{dos}^2\tfrac12 a - \text{dos}^2\tfrac12 b + \text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b\} \quad (9)$$

zastanówmy się teraz nad wyrażeniem w klamrze będącym

jest $1 - \text{dos}^2\tfrac12 a - \text{dos}^2\tfrac12 b + \text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b = 1 - \text{dos}^2\tfrac12 a - \text{dos}^2\tfrac12 b(1 - \text{dos}^2\tfrac12 a) = (1 - \text{dos}^2\tfrac12 a)(1 - \text{dos}^2\tfrac12 b) =$

$= \text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{wst}^2\tfrac12 b$. przez co równanie (9) przechodzi

$$(154)\quad \text{dos}^2\tfrac12 c = \text{dos}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b + 2\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 a\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\,C + \text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{wst}^2\tfrac12 b$$

136. Jeżeli zaś w tymsamym wzorze za dostawy położymy wyrażenia w wstawach (§78) otrzymamy

$$1 - 2\text{wst}^2\tfrac12 c = (1 - 2\text{wst}^2\tfrac12 a)(1 - 2\text{wst}^2\tfrac12 b) + 4\text{wst}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\,C \text{ albo}$$

$$1 - 2\text{wst}^2\tfrac12 c = 1 - 2\text{wst}^2\tfrac12 a - 2\text{wst}^2\tfrac12 b + 4\text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{wst}^2\tfrac12 b + 4\text{wst}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\,C$$

odjąwszy 1 po obudwóch stronach, podzieliwszy przez 2 i zamieniwszy znaki wypada

$$\text{wst}^2\tfrac12 c = \text{wst}^2\tfrac12 a - \text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{wst}^2\tfrac12 b + \text{wst}^2\tfrac12 b - \text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{wst}^2\tfrac12 b - 2\text{wst}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\,C$$

$$= \text{wst}^2\tfrac12 a(1 - \text{wst}^2\tfrac12 b) + \text{wst}^2\tfrac12 b(1 - \text{wst}^2\tfrac12 a) - 2\text{wst}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\,C$$

czyli ostatecznie

$$(155)\quad \text{wst}^2\tfrac12 c = \text{wst}^2\tfrac12 a\,\text{dos}^2\tfrac12 b - 2\text{wst}\tfrac12 a\,\text{dos}\tfrac12 b\,\text{wst}\tfrac12 b\,\text{dos}\tfrac12 a\,\text{dos}\,C + \text{wst}^2\tfrac12 b\,\text{dos}^2\tfrac12 a$$

137. Wzory (154) i (155) porównawszy ze wzorem $c^2 = a^2 - 2ab\,\text{dos}\,C + b^2$ (121) widzimy, iż co do postaci, $\text{wst}\tfrac12 C$ trójkąta prostokreślnego może być uważana za trzeci bok trójkąta prostokreślnego,

w którym są znane boki $wrt\frac{1}{2}a\, dos\frac{1}{2}b$ i $dos\frac{1}{2}a\, wrt\frac{1}{2}b$ z kątem zawartym C; podobnie także $dos\frac{1}{2}c$ jest bokiem trójkąta prostokreślnego, którego boki są znane $dos\frac{1}{2}a\, dos\frac{1}{2}b$ i $wrt\frac{1}{2}a\, wrt\frac{1}{2}b$ z kątem zawartym $(180^\circ - C)$ zapomocą więc wzoru (129) ustępu 107 będzie gdy $a = wrt\frac{1}{2}a\, dos\frac{1}{2}b$ i $b = wrt\frac{1}{2}b\, dos\frac{1}{2}a$; a drugi raz $a = dos\frac{1}{2}a\, dos\frac{1}{2}b$ i $b = wrt\frac{1}{2}a\, wrt\frac{1}{2}b$

$$(156)\quad \log wrt\tfrac{1}{2}c = \log(wrt\tfrac{1}{2}a\, dos\tfrac{1}{2}b) - \frac{sty\frac{1}{2}b}{sty\frac{1}{2}a} dos\, C - \frac{sty^2\frac{1}{2}b}{2\,sty^2\frac{1}{2}a} dos\, 2C - \frac{sty^3\frac{1}{2}b}{3\,sty^3\frac{1}{2}a} dos\, 3C \ldots$$

$$(157)\quad \log dos\tfrac{1}{2}c = \log(dos\tfrac{1}{2}a\, dos\tfrac{1}{2}b) + \frac{sty\frac{1}{2}b}{dos\frac{1}{2}a} dos\, C - \frac{sty^2\frac{1}{2}b}{2\,dos^2\frac{1}{2}a} dos\, 2C + \frac{sty^3\frac{1}{2}b}{3\,dos^3\frac{1}{2}a} dos\, 3C \ldots$$

138. Rozwiążemy trójkąt kulisty, którego dwa boki a, b niewiele różnią się od 90°, w którym idzie o wynalezienie kąta C zapomocą trzech boków danych a, b, c. Gdyby boki a, b, równe były 90°, kąt C miałby za miarę bok c (§21); lecz słowo niewiele różnią się od 90°, to też i kąt będzie miał za miarę tylko niewiele różniący się od c. Niech będzie $a = 90^\circ + \alpha$, $b = 90^\circ + \beta$, $C = c + x$; jeżeli się te wartości podstawi w równanie $dos\, C = \frac{dos\, c - dos\, a\, dos\, b}{wrt\, a\, wrt\, b}$ (§110) otrzymamy

$$dos(c+x) = \frac{dos\, c - wrt\,\alpha\, wrt\,\beta}{dos\,\alpha\, dos\,\beta}$$

; że zaś α i β są bardzo małe, więc opuszczając wyrazy gdzie α i β są podniesione do czwartej potęgi, gdy $wrt\,\alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 \ldots$, $dos\,\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \ldots$ (90, 89) możemy brać $wrt\,\alpha\, wrt\,\beta = \alpha\beta$, $dos\,\alpha\, dos\,\beta = (1-\frac{1}{2}\alpha^2)(1-\frac{1}{2}\beta^2) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}$, co daje

$$dos(c+x) = \frac{dos\, c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} = (dos\, c - \alpha\beta)(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\beta^2)^{-1} =$$

$$= (dos\, c - \alpha\beta)(1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2 \ldots) = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2)\, dos\, c - \alpha\beta,$$

gdzie $\alpha\beta$ nie mnożemy już przez $(\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2)$, bo wyższe potęgi nad drugą w α i β opuszczamy. Że zaś $dos(c+x) = dos\, c\, dos\, x - wrt\, c\, wrt\, x$, więc biorąc znowu szeregi $dos\, x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \ldots$, $wrt\, x = x - \frac{1}{6}x^3 \ldots$ i zaniedbując już kwadraty dla małości x będzie

$$dos\, c - x\, wrt\, c = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2)\, dos\, c - \alpha\beta,$$ zkąd

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\, dos\, c}{wrt\, c}$$

; położymy teraz $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q$, będzie $\alpha = p + q$ i $\beta = p - q$, co podstawiwszy w osta..

ni wzor wypada, gdy $\alpha\beta = (p+q)(p-q) = p^2 - q^2$ i $\alpha^2 + \beta^2 =$
$= p^2 + 2pq + q^2 + p^2 - 2pq + q^2$, a tem samem $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) = p^2 + q^2$,

$$x = \frac{p^2 - q^2 - p^2 \, dosc - q^2 \, dosc}{wstc} = p^2\left(\frac{1 - dosc}{wstc}\right) - q^2\left(\frac{1 + dosc}{wstc}\right),$$

że zaś $\frac{1 - dosc}{wstc} = sty\frac{1}{2}c$ (87) i na mocy tegoż samego wzoru

$\frac{1 + dosc}{wstc} = dot\frac{1}{2}c$, więc $x = p^2 \, sty\frac{1}{2}c - q^2 \, dot\frac{1}{2}c$. —

W ciągu tego rachunku wprowadzając takie α, β, x, za wstawy i dostawy, nie zamienilismy takowych na ich wyrażenia w częściach promienia, jak by koniecznie potrzeba, a to jedynie dla uproszczenia rachunku; teraz jednak po otrzymaniu wzoru, należy za x, α, β, stosownie do § 60 położyć $\frac{x}{R''}, \frac{\alpha}{R''}, \frac{\beta}{R''}$, co daje $\frac{x}{R''} = \frac{p^2}{R''^2} sty\frac{1}{2}c - \frac{q^2}{R''^2} dot\frac{1}{2}c$

albo znosząc mianowniki jest, $x = \frac{p^2}{R''} sty\frac{1}{2}c - \frac{q^2}{R''} dot\frac{1}{2}c$.

co zkąd x wypada w sekundach

Ten wzor jest bardzo użyteczny w operacyach geodezyjnych, skoro zachodzi potrzeba sprowadzenia katów do poziomu observowanych na płaszczyznach pochyłych. Jednakże gdyby wzniesienie lub zaleszenie czyli gdyby α i β przechodziło 2° do 3° należy użyć wzorow ogólnych. —

139. Rozwiązanie trójkąta kulistego, którego boki są bardzo małe w porównaniu do promienia kuli, na której się znajduje. W takim przypadku, trójkąt niewiele różni się od trójkąta prostolinijnego; uważając go jednak za taki, otrzymujemy rozwiązanie tylko przybliżone, bo zaniedbujemy przewyżkę summy jego kątów nad dwa kąty proste. Aby rozwiązanie mogło być ile możności, jako najwięcej przybliżone, należy mieć koniecznie wzgląd na tę przewyżkę. Ta to jest okoliczność nad którą się zastanowimy: podając w tym celu twierdzenie Legendrea.

Niech r oznacza promień kuli, na której znajduje się trójkąt z bokami a. b. c – wystawmy sobie kulę, której promień równa się jedności i trójkąt na tejże kuli podobny do pierwszego trójkąta. Boki ostatniego trójkąta znajdziemy z boków pierwszego, bo te boki mają się do siebie jak promienie kul na których się znajdują i jest $r : 1 = a : \frac{a}{r}$, gdzie $\frac{a}{r}$ oznacza bok ostatniego trójkąta – podobnie wypadnie $\frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ jako dwa drugie boki. Według wzoru (§110) mamy $\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$, że zaś r jest bardzo wielki względem a. b. c. więc sinusy i cosinusy łuków $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$, dają się wyrazić przez szeregi (90. 89), przy czem opuszczamy wyrazy wyższe nad 4 stopień w a. b. c, będzie więc

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)} \text{ albo}$$

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} + \frac{c^4}{24r^4} + \frac{b^2c^2}{4r^4}\right)}{\frac{bc}{r^2} - \frac{b^3c}{6r^4} - \frac{bc^3}{6r^4}} \text{ albo}$$

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right)}$$

mnożąc zaś licznik i mianownik drugiej strony przez $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$ czyli przenosząc $1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}$ do licznika z wykładnikiem mniej jeden i upraszczając wypada,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}. \quad (h)$$

Niech teraz A' będzie kątem przeciwnym bokowi a w trójkącie prostolinijnym, którego boki co do długości są równe bokom a. b. c. będziemy mieli $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, podnosząc to równanie do kwadratu i odejmując obiedwie strony od jedności otrzymujemy $1 - \cos^2 A' = \frac{4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2}{4b^2c^2}$ albo zniósłszy mianownik i pisząc $\sin^2 A'$ za $1 - \cos^2 A'$ jest,

$$4b^2c^2 \sin^2 A' = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

którą tę wartość podstawiwszy w równanie (h) wypada

$$\cos A = \cos A' - \frac{4b^2c^2 \sin^2 A'}{24\, bc\, r^2} = \cos A' - \frac{bc \sin^2 A'}{6r^2} \quad (h')$$

Niech będzie $A = A' + x$ więc $\cos A = \cos(A'+x) = \cos A' \cos x - \sin x \sin A'$, albo biorąc $\cos x = 1$ i $\sin x = x$, to jest tylko po jednym wyrazie z szeregów (89 i 90), dla małości łuku x wypada

$\cos A = \cos A' - x \sin A'$, porównawszy to równanie z (h') otrzymujemy iż $x \sin A' = \frac{bc \sin^2 A'}{6r^2}$, zkąd $x = \frac{bc}{6r^2} \sin A'$

a tem samem $A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A'$

Lecz $\frac{1}{2} bc \sin A'$ jest powierzchnią trójkąta prostokreślnego (§98), którego boki są a, b, c i która nie różni się wiele od powierzchni trójkąta kulistego danego. Nazwawszy więc jedną lub drugą przez α będzie $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$ zkąd zaraz $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$. Podobnie znajdziemy że $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$ i $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$. Dodawszy trzy te równania do siebie wypada $A'+B'+C' = A+B+C - \frac{\alpha}{r^2}$, albo gdy $A'+B'+C' = 180°$ więc $A+B+C-180° = \frac{\alpha}{r^2}$. Zkąd się pokazuje, że $\frac{\alpha}{r^2}$ jest przewyżką summy kątów trójkąta kulistego nad dwa kąty proste.

Z tego wszystkiego pokazuje się, że można ustanowić następujące twierdzenie, zapomocą którego rozwiązanie trójkątów kulistych bardzo małych, sprowadza się do rozwiązania trójkątów prostokreślnych. —

Jeżeli są dwa trójkąty, jeden kulisty z bokami bardzo małemi względem promienia kuli, na której się znajduje, a drugi prostokreślny, którego boki są równe co długości bokom trójkąta pierwszego; kąty trójkąta prostokreślnego, równe są kątom odpowiednim trójkąta ku-

którego zmniejszonym trzecią częścią przewyżki summy wszyst-kich trzech kątów kulistych nad dwa kąty proste, i wzajemnie kąty trójkąta kulistego równe są kątom odpowiednym w trójkącie prostokreślnym powiększonym trzecią częścią rzeczonej przewyżki.

Chodzi więc tylko o wyrachowanie $\frac{\alpha}{r^2}$ czyli przewyżki, którą nazwijmy przez ε, ta przewyżka wynajduje się w prost przez dane trójkąta kulistego uważanego za prostokreślny sposobami wyżej podanemi (§94 – §104) na wynalezienie powierzchni trójkąta, jeżeli tylko wprzód wynalezioną powierzchnię podzielimy przez r^2. Aby zaś ta przewyżka wypadła w sekundach wypada ją pomnożyć przez R″ liczbę sekund w promieniu i będzie

$\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} R''$. W tem wyrażeniu znajduje się czynnik $\frac{R''}{r^2}$ stały. Logarytm jego daje się obrachować w sposób następujący.

Najprzód log R″ = 5,3144251 (§59). 2° promień ziemi w sążniach francuzkich wynosi r = 3267393, tego logarytm jest 6,5742013

a więc $\log R'' - 2\log r = 5,3144251 - 2 \times 6,5142013 = 2,2860225 - 10$ ↑

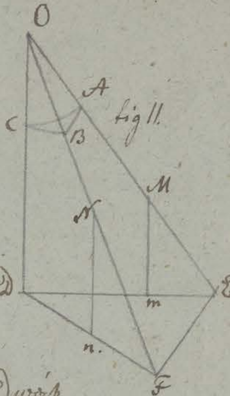
to jest że do logarytmu powierzchni trójkąta dodawszy 2,2860225 a odjąwszy 10 otrzymamy logarytm, któremu odpowiadające sekundy wyrażą ε.

Skoro się już obrachuje ε, należy od każdego kąta trójkąta kulistego odjąć $\frac{1}{3}\varepsilon$ i wtedy w trójkącie prostokreślnym utworzonym z boków a, b, c, i kątów $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$ i $C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$, mieć będziemy potrzebne dane dla wynalezienia innych części trójkąta ∫., a tak poznamy także części trójkąta kulistego.

↑ w sążniach krakowskich promień ziemi równa się 3561673 logarytm jego jest 6,5516539 – Logarytm więc stały dla sążni krakowskich log ε wynosi 2,2111173 (– 10.

140. Przykłady.

Niech będą O, M, N, trzy punkta położone na płaszczyznie pochylonej do poziomej; spuściwszy z tych trzech punktów prostopadłe OD, Mm, Nn, na poziomą płaszczyznę DEF, przedmioty położone w O, M, N, przedstawią się na płaszczyznie poziomej przez rzuty D, m, n, a kąt MON przez mDn. To założywszy, jeżeli jest dany kąt MON i pochyłości jego dwóch ramion OM i ON do prostej OD, idzie o wynalezienie kąta rzutu mDn.



Z punktu O nakreślmy koło promieniem równym jedności, utworzy się trójkąt kulisty ABC, którego trzy boki są znane, można więc będzie wynaleźć kąt C równy mDn za pomocą wzoru $wst \frac{1}{2} C = R \sqrt{\frac{wst \frac{1}{2}(c+a-b)\, wst \frac{1}{2}(c-a+b)}{wst\, a\, wst\, b}}$ albo

$$Dost \tfrac{1}{2} C = R \sqrt{\frac{wst \frac{1}{2}(a+b+c)\, wst \frac{1}{2}(a+b-c)}{wst\, a\, wst\, b}}$$

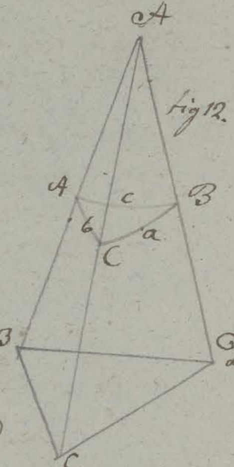
Niech kąt MON $= 64^\circ\, 44'\, 50''$, kąt MOD $= 81^\circ\, 16'\, 10''$ i NOD $= 104^\circ\, 20''$ będzie $c = 64^\circ 44' 50''$, $b = 81^\circ 16' 10''$, $a = 104^\circ\, 20''$ więc

$\frac{1}{2}(c+b-a) = 21^\circ\, 0'\, 20''$ i $\frac{1}{2}(c+a-b) = 43^\circ\, 44'\, 30''$

$$
\begin{aligned}
2 \log R &= 20, \\
\log \tfrac{1}{2}(c+b-a) &= 9{,}5544388 \\
\log \tfrac{1}{2}(c+a-b) &= 9{,}8397344 \\
Dop.\ ar.\ \log wst\, a &= 0{,}0131064 \\
Dop.\ ar.\ \log wst\, b &= 0{,}0056615 \\
\hline
\log wst \tfrac{1}{2} C &= \frac{19{,}4123411}{2} = 9{,}7061705 = \log wst (30^\circ\, 33'\, 16{,}5''
\end{aligned}
$$

skąd jest że $\frac{1}{2} C = 30^\circ\, 33'\, 16{,}5''$ a zatem $C = 61^\circ\, 6'\, 33''$ czyli że kąt MON uważany na płaszczyznie pochyłej wynoszący $64^\circ\, 44'\, 50$ sprowadzony do poziomej czyni tylko $61^\circ\, 6'\, 33''$

141. Znając pochyłości dwóch płaszczyzn ADB, ADC do siebie i kąty, jakie czynią linie AB i AC ze wspólnem przecięciem AD, wynaleźć kąt, jaki czynią linie AB AC pomiędzy sobą i kąty pochyłości płaszczyzny ABC do płaszczyzn ADB, ADC.



Niech kąt BADC $= 34^\circ\, 16' = B$

kąt BAD $= 43^\circ\, 15' = c$

kąt CAD $= 110^\circ\, 23'\, 10'' = a$.

Z wierzchołka A nakreśliwszy kulę promieniem równym 1, wypadnie trójkąt kulisty ABC, w którym są znane kąt B, boki a i c, należy wynaleźć bok b i kąty A i C.

Wzory do tego gotowe mamy w § 126. i jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos B \operatorname{tg} a}{R},\quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} B \sin\varphi}{\sin(c-\varphi)},\quad \cos b = \frac{\cos a \cos(c-\varphi)}{\cos\varphi}$$

Spełnienie łuku a wynosi $69^\circ\, 36'\, 50''$

$\log \cos B = 9,9172040.$

$\log \operatorname{tg} a = 10,4299000$

$\text{Dop. ar.} \log R = 0$

$\log \operatorname{tg}\varphi = 10,3471040 = \log \operatorname{tg}(65^\circ\, 47'\, 16{,}36'')$

że zaś $\cos B$ jest dodatna a $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}(110^\circ\, 23'\, 10'') = \operatorname{tg}(180 - a) = -\operatorname{tg} a$ jest ujemna, więc też $\operatorname{tg}\varphi$ jest ujemna, a tem samem i łuk $65^\circ 47' 16''$ jest ujemny, bo jest $\varphi = -(65^\circ 47' 16'')$

Rachować mamy $\operatorname{tg} A$. najprzód $c = 43^\circ 15'$, $\varphi = -(65^\circ 47' 16'')$ spełnienie tego więc $c - \varphi = 43^\circ 15' + 65^\circ 47' 16'' = 109^\circ\, 7'\, 16''$ łuku wynosi $70^\circ\, 57'\, 44''$ więc

$\log \operatorname{tg} B = 9,8333394.$

$\log \sin\varphi = 9,9600107.$

$\text{D. a.} \log \sin(c-\varphi) = 0,0244289 = \text{D. ar.} \log \sin(70^\circ 57' 44'')$

$\log \operatorname{tg} A = 9,8177790 = \log \operatorname{tg}(33^\circ\, 19'\, 4'')$

Że zaś styB jest dodatnia, wrt-φ jest ujemna i dopeł. arytm. wrt(c+φ) jest dodatne, więc otrzymana styczna jest ujemna a tem samem należy brać za A kąt spełnienia i będzie

$A = 146^\circ 40' 56''$. —

Szukajmy ~~kąta~~ boku b.

$\log \cos a = 9,5420094.$

$\log \cos(c-\varphi) = 9,5134749.$

$\text{D.a.} \log \cos\varphi = 0,3870932.$

$\log \cos b = 9,4425775 = \log \cos(73^\circ 54' 54'')$

Że zaś cos a, jako kąta rozwartego jest ujemna i dla tej samej przyczyny cos(c-φ) jest także ujemna, lecz gdy cos-φ = cos φ jest dodatnie więc cos b jest dodatnia i bok b jest ostry czyli mamy $b = 73^\circ 54' 54''$

Dla wynalezienia kąta C mamy wzory §126.

$$\operatorname{sty}\varphi' = \frac{\cos B \operatorname{sty} c}{R} \; ; \; \operatorname{sty} C = \frac{\operatorname{sty} B \operatorname{wrt}\varphi'}{\operatorname{wrt}(a-\varphi')}$$

$\log \cos B = 9,9172040.$

$\log \operatorname{sty} c = 9,9734539.$

$\text{D.a.} \log R = 0$

$\log \operatorname{sty}\varphi' = 9,8906579 = \log \operatorname{sty}(37^\circ 51' 44{,}5'')$

Że zaś cos B jest dodatnia i sty c także dodatnia więc sty φ' jest dodatnia a tem samem φ' jest ostre i równe $37^\circ 51' 44{,}5''$

$\log \operatorname{sty} B = 9,8333394.$

$\log \operatorname{wrt}\varphi' = 9,7880032.$

$\text{D.a.} \log \operatorname{wrt}(a-\varphi') = 0,0205237$

$\log \operatorname{sty} C = 9,6418663 = \log \operatorname{sty}(23^\circ 40' 20{,}7'')$

Że zaś sty B jest dodatnia i wrt φ' także, jakoteż i wrt(a-φ'), więc sty C musi być także dodatnia i kąt C ostry więc równy $23^\circ 40' 20{,}7''$. —

Kąty A i C możemy jeszcze wynaleźć przez analogię Neperowe, to jest

$$\operatorname{stg}\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}(a-c)}{\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}(a+c)}\operatorname{dot}\tfrac{1}{2}B \;;\; \operatorname{stg}\tfrac{1}{2}(A-C) = \frac{\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}(a-c)}{\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}(a+c)}\operatorname{dot}\tfrac{1}{2}B.$$

jest bowiem $a+c = 153°\,38'\,10''$ więc $\tfrac{1}{2}(a+c) = 76°\,49'\,5''$

$a-c = 67°\,8'\,10$ więc $\tfrac{1}{2}(a-c) = 33°\,34'\,5''$

$B = 34°\,16'$ więc $\tfrac{1}{2}B = 17°\,8'$.

$\log\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}(a-c) = 9,9207647$

$\log\operatorname{dot}\tfrac{1}{2}B = 10,5110587$

$\mathrm{C.a}\log\operatorname{dos}\tfrac{1}{2}(a+c) = 0,6419812$

$\log\operatorname{stg}\tfrac{1}{2}(A+C) = 11,0738046 = \log\operatorname{stg}(85°\,10'\,38'')$

Gdy zaś wszystkie czynniki były dodatne więc kąt $\tfrac{1}{2}(A+C)$ jest ostry.

$\log\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}(a-c) = 9,7426678.$

$\log\operatorname{dot}\tfrac{1}{2}B = 10,5110687$

$\mathrm{C.a}\log\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}(a+c) = 0,0115968$

$\log\operatorname{stg}\tfrac{1}{2}(A-C) = 10,2653233 = \log\operatorname{stg}(61°\,30'\,17,5'')$

Kąt ten jest także ostry, bo wszystkie czynniki dodatnie

więc $A = 85°\,10'\,38'' + 61°\,30'\,17,5'' = 146°\,40'\,55,5''$

$B = 85°\,10'\,38'' - (61°\,30'\,17,5'') = 23°\,40'\,20,5''$

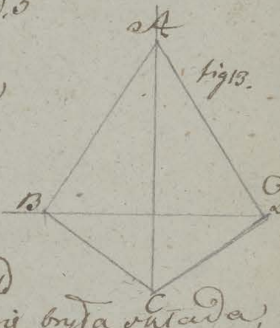


fig 13.

142. Znaleźć pochyłość ścian ~~pięciu brył~~ przyległych pięciu brył foremnych. —

Niech A będzie wierzchołkiem kąta bryłowego należącego do jednej którejkolwiek bryły foremnej. Ściany tego kąta tworzą kąty BAC, CAD, BAD itd należące do wielokątów foremnych z których się bryła składa; nazwijmy liczbę boków wielokąta foremnego ścianę bryły tworzącego przez n a liczbę kątów płaskich składających kąt bryłowy przy A nazwijmy przez m. Końce krawędzi równych AB, AC, AD itd połączmy liniami BC, BD, CD, itd utworzy się

przez to wielokąt foremny CBD.. o tylu bokach, z ilu ścian składa się kąt bryłowy A a więc o m. —

Szukanym kątem jest BCAD który nazwijmy γ; chcąc go wynaleźć potrzeba mieć koniecznie dane kąty płaskie BCA, DCA, BCD. których wynalezieniem zaraz się zatrudnimy. — Kąt BAC należy do kątów wielokąta foremnego ścianę bryły będącego — summa takich kątów waży dwa razy tyle kątów prostych, ile wielokąt ma boków mniej 4 kąty proste. nazwawszy więc kąt prosty przez $\frac{\pi}{2}$ będzie $(2n-4)\frac{\pi}{2} = (n-2)\pi$ a zatem jeden kąt tego wielo-kąta [BAC] waży $\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$. Mając już wiadomy kąt BAC znajdziemy także kąt BCA — wszystkie te kąty ACB, ACD, ADC są sobie równe, więc z trój-kąta ABC mamy $BAC + 2ACB = \pi$ zkąd $ACB = \frac{\pi - BAC}{2} =$

$$= \frac{\pi - \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{\pi}{n}$$

i taka jest wartość kąta ACB. —

Co się tycze kąta BCD, powiedzieliśmy że wielokąt BCD.. ma m boków, więc jeden jego kąt $BCD = \frac{(m-2)\pi}{m} = \pi - \frac{2\pi}{m}$.

Wynalezienie zatem kąta γ zależy już od wzoru

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(c-b+a)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}(c+b-a)}{\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b}}$$

a że $a = b$ więc

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c}{\text{wst}^2 a}} = \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\text{wst}\,a}.$$

W tym przy-padku jest $c = BCD = \pi - \frac{2\pi}{m}$ i $a = ACB = ACD = \frac{\pi}{n}$.

więc $\text{wst}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{wst}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{m}\right)}{\text{wst}\frac{\pi}{n}} = \frac{\text{dos}\frac{\pi}{m}}{\text{wst}\frac{\pi}{n}}$ i taki jest wzór ogólny, który teraz zastosujemy do każdego szczegól-nego przypadku. —

1) W czworościanie jest $n = 3$, $m = 3$ więc $\text{wst}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dos}\frac{1}{3}\pi}{\text{wst}\frac{1}{3}\pi} = \frac{\text{dos}\,60^\circ}{\text{wst}\,60^\circ} =$

$\frac{\text{wst}\,30^\circ}{\text{dos}\,30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ (28) czyli $\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ~~w więc wst² ½γ~~

więc $\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{1}{3}$ i $\text{dos}^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ a tem samem $\text{dos}\,\gamma = \text{dos}^2\tfrac{1}{2}\gamma - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\gamma =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ to jest $\text{dos}\,\gamma = \frac{1}{3}$.

II. W sześcianie jest $n = 4$, $m = 3$ więc

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dos}\,\frac{1}{3}\pi}{\text{wst}\,\frac{1}{4}\pi} = \frac{\text{dos}\,60^\circ}{\text{wst}\,45^\circ} = \frac{\text{wst}\,30^\circ}{\text{dos}\,45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

a zatem $\text{dos}\,\gamma = 1 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - 2\times\tfrac{1}{2} = 1 - 1 = 0$ słowo zaś

$\text{dos}\,\gamma$ jest zero, to γ musi być kąt prosty czyli 90°.

III W dwunastościanie jest $m = 3$, $n = 5$ więc

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dos}\,\frac{1}{3}\pi}{\text{wst}\,\frac{1}{5}\pi} = \frac{\text{dos}\,60^\circ}{\text{wst}\,36^\circ} = \frac{\text{wst}\,30^\circ}{\text{wst}\,36^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\text{wst}\,36^\circ}$$

Idzie tylko o wynalezienie $\text{wst}\,36^\circ$ — nazwijmy $\text{wst}\,18^\circ = x$ a że x równe jest ~~cięciwie~~ połowie cięciwy łuku dwarazy większego (§13) więc $2x =$ cięciwie łuku 36°. Łuk 36° jest dziesiątą częścią obwodu koła, cięciwa dziesiątej części obwodu koła, jako boku dziesięciokąta foremnego, jest średnio geometrycznie proporcyonalna pomiędzy promieniem i odcinkiem — jest zatem $1 : 2x = 2x : 1 - 2x$

skąd $4x^2 = 1 - 2x$ i $x^2 + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}$ a tem samem $x = -\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{4}{16}}$

czyli $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, to jest że $\text{wst}\,18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Znajdziemy

teraz $\text{dos}\,18^\circ$ ze zrównania $\text{dos}^2 18^\circ = 1 - \text{wst}^2 18^\circ = 1 - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{16}\right)$ albo

$\text{dos}^2 18^\circ = \frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$ a tem samem $\text{dos}\,18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Że zaś $\text{wst}\,36^\circ = 2\,\text{wst}\,18^\circ\cdot\text{dos}\,18^\circ$ (24) więc $\text{wst}\,36^\circ = 2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

albo $\text{wst}\,36^\circ = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{60 - 8\sqrt{5} - 20}$

albo $\text{wst}\,36^\circ = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{4(10-2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Mamy teraz $\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ Z tego znowu

mamy $dos\,\gamma = 1 - 2\,wst^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - 2\left(\frac{4}{10-2\sqrt5}\right) = \frac{2-2\sqrt5}{10-2\sqrt5} = \frac{1-\sqrt5}{5-\sqrt5}$

albo ~~[illegible]~~ pomnożywszy licznik i mianownik drugiej strony przez $\sqrt5$ będzie $dos\,\gamma = \frac{-5+\sqrt5}{\sqrt5(5-\sqrt5)} = -\frac{(5-\sqrt5)}{\sqrt5(5-\sqrt5)} = -\frac{1}{\sqrt5}.$

Co się tycze $wst\,\gamma$ mamy $wst^2\gamma = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ więc $wst\,\gamma = \frac{2}{\sqrt5}$ teraz $sty\,\gamma = \frac{wst\,\gamma}{dos\,\gamma} = -2.$

IV W ośmiościanie jest $n=3$ $m=4$. więc $wst\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{dos\frac{1}{4}\pi}{wst\frac{1}{3}\pi} =$

$$= \frac{dos\,45^\circ}{wst\,60^\circ} = \frac{wst\,45^\circ}{dos\,30^\circ} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$dos\,\gamma = 1 - 2\,wst^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - 2\cdot\tfrac{2}{3} = 1 - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{1}{3}.$$

Z tąd się pokazuje, że kąty pochyłości w czworościanie są spełnieniem kątów ~~w ośmi~~ pochyłości w ośmiościanie. —

V W dwudziestościanie jest $n=3$, $m=5$ więc

$$wst\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{dos\frac{1}{5}\pi}{wst\frac{1}{3}\pi} = \frac{dos\,36^\circ}{wst\,60^\circ} = \frac{dos\,36^\circ}{dos\,30^\circ}$$

$$dos^2 36^\circ = 1 - wst^2 36^\circ = 1 - \tfrac{1}{16}(10-2\sqrt5) = \frac{16-10+2\sqrt5}{16} = \frac{6+2\sqrt5}{16}$$

$\therefore dos\,36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt5}$ a zatem

$wst\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt5}}{\frac{1}{2}\sqrt3} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt5}}{2\sqrt3}$, ~~a że~~ lecz

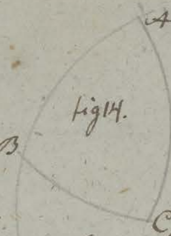
$$dos\,\gamma = 1 - 2\,wst^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - 2\left(\frac{6+2\sqrt5}{4.3}\right) = 1 - \left(\frac{6+2\sqrt5}{6}\right) = \frac{6-6-2\sqrt5}{6}$$

albo $dos\,\gamma = -\frac{2\sqrt5}{6} = -\frac{\sqrt5}{3}$. Co się tycze wstawy, jest

$wst^2\gamma = 1 - \left(-\frac{\sqrt5}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$, a tem samem

$$wst\,\gamma = \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3}.$$

143. Znając szerokość jeograficzną dwóch miejsc i różnicę w ich długości, wynaleźć najkrótszą odległość tychże miejsc.



Wystawmy sobie trójkąt kulisty ABC utworzony pomiędzy biegunem C i dwoma miejscami A, B. W tym trójkącie znany jest kąt przy biegunie C, ponieważ on równa się różnicy długości pomiędzy punktami A i B.; znane są także dwa boki AC i BC, bo one są dopełnieniem szerokości tychże punktów – Można więc będzie wynaleźć trzeci bok AB przez wzory §126. które są $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos C \operatorname{tg} b}{a}$; $\cos c = \frac{\cos b \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi}$

Niech A i B oznaczają Kraków i Wilno. Według Prof. St. Sterzkowskiego Długość jeograficzna Krakowa do południka Paryskiego wynosi 17° 37′ 15″ – Szerokość Krakowa 50° 3′ 50″ Długość jeograficzna Wilna z Jeografii Śniadeckiego jest 22° 36′ 15″ Szerokość 54° 41′ 2″ Różnica więc pomiędzy Długościami jest 4° 59′ = C. Dopełnienie szerokości Krakowa wynosi 39° 56′ 10″ = a. Dopełnienie szerokości Wilna wynosi 35° 18′ 58″ = b. więc

$$\log\cos C = 9.9983553$$
$$\log\operatorname{tg} b = 9.8503164 \quad -10$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi = 9.8486717 = \log\operatorname{tg}(35^\circ\, 12'\, 49{,}7'') \text{ więc } \varphi = +(35^\circ\, 12'\, 49{,}7'')$$

$$\log\cos b = 9.9116769 \qquad a-\varphi = 4^\circ\, 43'\, 20{,}3''$$
$$\log\cos(a-\varphi) = 9.9985233$$
$$\text{Dopeł. ar. } \log\cos\varphi = 0.0877747$$
$$\log\cos c = 9.9979749 = \log\cos(5^\circ\, 31'\, 44'')$$

więc c czyli odległość najkrótsza Krakowa od Wilna wynosi 5° 31′ 44″ albo rachując 15 mil na stopień jest 83,1 mil. —

144. Niech będą wymierzone kąty EOF fig 11, FOd, EOd, idzie o sprowadzenie kąta EOF do poziomu — Po wymierzeniu pokazuje się, iż EOF = 63° 12' 52,"4 = c, że kąt FOd = α = 91° 23' 6" i że kąt EOd = b = 87° 43' 12", czyli że kąty FOd i EOd niewiele różnią się od 90°. W takim więc przypadku użyć możemy rozwiązania §138. Do czego służy wzór $x = \frac{p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\rho''} - \frac{q^2}{\rho''} \cot \frac{1}{2}c$, gdzie x znaczy poprawkę boku c dla otrzymania kąta C, wreszcie gdzie $p = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ $q = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ i odnosząc raz α i β do danych kątów a i b spostrzegamy iż α = 1° 23' 6", β = −2° 16' 48" —

$\alpha+\beta = -(53'42'')$ więc $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = p = -(26'51'')$

$\alpha-\beta = 3^\circ 39'54''$ więc $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = q = 1^\circ 49'57''$

$c = 63^\circ 12' 52{,}4''$ więc $\frac{1}{2}c = 31^\circ 36' 26{,}2''$

Rachunek $\frac{p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}c}{\rho''}$

$2 \log p = 6{,}4141910 = 2\log(26'51'') = 2\log 1611''$ (szuka się tego log pomiędzy liczbami)

$\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}c = 9{,}7891429 - 10$

C dop ar $\log \rho'' = 4{,}6855749$

$\log$ 7,743'' ~~342,86''~~ $= 0{,}8889088$ (tego logaryt. szuka się ~~liczby~~ sekund pomiędzy liczbami)

Rachunek $\frac{q^2}{\rho''} \cot \frac{1}{2}c$

$2\log q = 2\log 6597'' = 7{,}6386930$

$\log \cot \frac{1}{2}c = 10{,}2108571 - 10$

C dop. ar $\log \rho'' = 4{,}6855749$

$\log 342{,}86'' = 2{,}5351250$ (szuka się pomiędzy liczbami)

więc $x = \frac{p^2}{\rho''} \operatorname{tg}\frac{1}{2}c - \frac{q^2}{\rho''}\cot\frac{1}{2}c = 7{,}74'' - 342{,}86'' = 7{,}74'' - (5'42{,}86'')$

$= -5'35{,}12''$

więc $C = c + x = 63^\circ 12' 52{,}4'' - (5'35{,}12'') = 63^\circ 7' 17{,}28''$

145. Niechaj w trójkącie na ziemi mierzonym będzie kąt $A = 102°43'22,6''$ $B = 62° 11' 42,5''$ i bok zawarty $c = 38067$ sąż. fran. idzie o wy.. nalezienie kąta C i boków a, b.

Użyjemy sposobu rozwiązania podanego w §139. Idzie najprzód o wynalezienie powierzchni trójkąta α, według §98 $\alpha = \frac{1}{2}bc\,\text{wrt}A$ a że $\frac{b}{c} = \frac{\text{wrt}B}{\text{wrt}C}$ więc $\alpha = \frac{c^2\,\text{wrt}A\,\text{wrt}B}{2\,\text{wrt}C}$ jeszcze $C = 180° - (A+B)$ i $\text{wrt}C = \text{wrt}(A+B)$ a zatem

$$\alpha = \frac{c^2\,\text{wrt}A\,\text{wrt}B}{2\,\text{wrt}(A+B)}$$

$180° - A = 77° 16' 37,4''$

$180° - (A+B) = 15° 4' 54,9''$

$2\log c = 9.1610974.$

$\log\text{wrt}A = 9,9892034.$

$\log\text{wrt}B = 9,9467182$

$\text{D.a.}\log 2 = 9,6989700$

$\text{D.a.}\log\text{wrt}(A+B) = 0,5846930$

$\log\alpha = 9,3806820$

Logar. stały $= 2,2860225\ (-10$

$\log\varepsilon = 1,6667045 = \log 46,42''$, więc $\frac{1}{3}\varepsilon = 15,47''$

Aby zamienić $\log\alpha$ na $\log\varepsilon$ potrzeba dodać stały logarytm §139.

$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon = 102° 43' 7,13''$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon = 62° 11' 27,03''$

$C' = 180° - (A'+B') = 15° 5' 25,84''$

więc $C = C' + \frac{1}{3}\varepsilon = 15° 5' 41,31''$

Teraz jest $a = \frac{c\,\text{wrt}A'}{\text{wrt}C'}$ i $b = \frac{c\,\text{wrt}B'}{\text{wrt}C'}$

$\log c = 4,5805487$

$\log\text{wrt}A' = 9,9892108$

Dopł. ar. $\log\text{wrt}C' = 0,5844574$

$\log a = 5,1542169 = \log 142630.$

$\log c = 4,5805487$

$\log\text{wrt}B' = 9,9467010$

$\text{d.}\log\text{wrt}C' = 0,5844574$

$\log b = 5,1117071 = \log 129330,5$

jest więc jako odpowiedź $a = 142630$ sąż. fr. $b = 129330,5$ sąż. fr.

$C = 15° 5' 41,31''$

II Jeżeli w trójkącie na ziemi wymierzone są boki c, b i kąt A. wynaleźć kąty B. C. i bok a.

$c = 18702$ sąż. fr. $b = 27885$ sąż. fran. $A = 113°\ 21'\ 53{,}4''$

$$\alpha = \frac{bc\,\text{sin}A}{2R.}$$

$\log b = 4{,}4453706.$
$\log c = 4{,}2718881$
$\log\text{sin}A = 9{,}9628418$
$D.a.\log 2 = 9{,}6989700$

$\log\alpha = 8{,}3790705$
$\text{logar. stały} = 2{,}2860225\ (-10$

$\log\varepsilon = 0{,}6650930 = \log 4{,}624''$

więc $\frac{1}{3}\varepsilon = 1{,}54''$

$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon = 113°\ 21'\ 51{,}86''$ $180° - A' = 66°\ 38'\ 8{,}14'' = (B'+C')$

$\frac{1}{2}(B'+C') = 33°\ 19'\ 4{,}07''$ $\text{Stg}\frac{1}{2}(B'-C') = \frac{(b-c)\,\text{Stg}\frac{1}{2}(B'+C')}{b+c.}$ (§93)

$\log(b-c) = 3{,}9629846.$
$\log\text{Stg}\frac{1}{2}(B'+C') = 9{,}8177787$
$\text{Dop.}\log(b+c) = 5{,}3317353$

$\log\text{Stg}\frac{1}{2}(B'-C') = 9{,}1124980 = \log\text{Stg}\,(7°\ 22'\ 57{,}27''.)$

$B' = \frac{1}{2}(B'+C') + \frac{1}{2}(B'-C') = 40°\ 42'\ 1{,}34''$
$C' = \frac{1}{2}(B'+C') - \frac{1}{2}(B'-C') = 25°\ 56'\ 6{,}8''$

Dla wynalezienia boku a mamy $a = \frac{(b-c)\,\text{cos}\frac{1}{2}A'}{\text{sin}\frac{1}{2}(B'-C')}$ (124)

$\log(b-c) = 3{,}9629846$
$\log\text{cos}\frac{1}{2}A' = 9{,}7397958$
$\text{Dop.}\log\text{sin}\frac{1}{2}(B'-C') = 0{,}8911170$

$\log a = 4{,}5938974 = \log 39255{,}2.$

$B = B' + \frac{1}{3}\varepsilon = 40°\ 42'\ 2{,}88''$ — $C = C' + \frac{1}{3}\varepsilon = 25°\ 56'\ 8{,}34''$

To jest że kąty szukane są $B = 40°\ 42'\ 2{,}88''$, $C = 25°\ 56'\ 8{,}34''$ i bok $a = 39255{,}2$ sąż. fr.

Przypisy

I Niech będzie równanie $b^x = y$, w którem uczyniwszy $x=0$ otrzymujemy $b^0 = 1$, powiększywszy wykładnik zero o liczbę f nieskończenie małą, jeżeli powiększy się także o pewną liczbę, którą nazwijmy ω będzie $b^f = 1+\omega$; ω w swojej wielkości zależy nie tylko od f, ale także i od b; nazwijmy przez k liczbę, która z przyczyny zasady b wpływa na wzrost ω, oznaczenie zaś liczebne k zostawmy do późniejszego czasu; będzie więc $\omega = kf$, zkąd wypadnie $b^f = 1+kf$; albowiem założywszy $f=0$ wraca się znowu $b^0 = 1+k\times 0$ czyli $b^0 = 1$ jako być powinno. Podniósłszy obiedwie strony równania $b^f = 1+kf$ do potęgi n otrzymamy $b^{fn} = (1+kf)^n$. Lecz że f jest nieskończenie małe, należy więc dla n nadać taką wartość, aby iloczyn fn stał się liczbą zwyczajną, przez co, gdy b uważa się za zasadę logarytmów, iloczyn ten będzie logarytmem wyrażenia $(1+kf)^n$, które nic nie przeszkadza nazwać dla krótkości przez y co daje $(1+kf)^n = y$ . . (M) Połóżmy $fn = x$, gdzie x uważa się za liczbę zwyczajną, to jest ani za nieskończenie wielką ani za nieskończenie małą, jakąż sobie wreszcie z tego iloczynu życzymy otrzymać. Ze zrównania $fn = x$ otrzymuje się $n = \frac{x}{f}$, że zaś f jest nieskończenie małe, więc iloraz $\frac{x}{f}$ a tem samem n jest nieskończenie wielkie. Widzimy więc że fn czyli x jest wtedy logarytmem wyrażenia $(1+kf)^n$ albo y, kiedy jest $n = \infty$.

Ze zrównania (M) wyciągnijmy pierwiastek stopnia $n$tego wypada $1+kf = y^{\frac{1}{n}}$, ~~ale~~ dalej otrzymuje się $kf = y^{\frac{1}{n}} - 1$, mnożąc zaś obiedwie strony przez $n = \infty$ wypada

$kfn = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$, dzieląc znowu przez k jest $fn = \frac{n}{k}(y^{\frac{1}{n}}-1)$; lecz
$fn = x$ jest Log y, więc $Log\,y = \frac{n}{k}(y^{\frac{1}{n}}-1)$ kiedy $n=\infty$..(N); gdzie
Log oznacza jakikolwiek układ logarytmów; albowiem w ca-
łem naszem rozumowaniu nie przywiązaliśmy się do żadne-
go szczególnego układu; należy przecież jeden z takowych obrać
za pierwszy, z którego moglibyśmy przechodzić sposobem
wiadomym do innych układów. Jako zaś liczba k zale-
żąca od zasady, może mieć rozmaite wartości według
rozmaitości samych zasad, więc weźmy za pierwszy ten
układ, w którym $k=1$. i logarytm tego układu nazwijmy
zaraz przez l'og, gdyż się niżej pokaże, że układ ten jest
Neperowski; otrzymamy w takim przypadku, kiedy $n=\infty$
$l'og\,y = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$; więc logarytmem liczby y jest granica,
do której się zbliża wyrażenie $n(y^{\frac{1}{n}}-1)$ skoro n staje
się nieskończenie wielkie. — Dla przejścia do logarytmów
pospolitych potrzeba pomnożyć drugą stronę przez m
jest $log\,y = mn(y^{\frac{1}{n}}-1)$ — porównawszy ten wzór ze wzorem
(N). ~~wi~~ widzimy iż aby Log y wyrażało logarytm pospo-
lity musi być koniecznie $m = \frac{1}{k}$ zkąd $= \frac{1}{m} = 2,3025850929$
dla logarytmów pospolitych. —

Ze wzoru $l'og\,y = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$ kiedy $n=\infty$ wyrażonego
bez dowodu przez byłego Professora Uniwersytetu Ja-
gellońskiego Dr. Hube, w prelekcyach jego Matematyki
wyższej, który tu przytaczamy, jak go dowiedliśmy
w Programmacie Instytutu Technicznego z r. 1842,
dają się wyprowadzić prostym i łatwym szeregi
logarytmiczne i trygonometryczne. Jakoż oznaczywszy
przez x logarytm y będzie $x = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$ kiedy $n=\infty$,
oznaczmy dalej zasadę w takim układzie, której jeszcze
nie znamy przez C będzie także $C^x = y$, ze zrównania

$x = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$ daje się wyrazić wartość na y; albowiem wykonawszy mnożenie będzie: $x = ny^{\frac{1}{n}} - n$, dalej $ny^{\frac{1}{n}} = x+n$ albo $y^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{x}{n}$, podniósłszy zaś obiedwie strony do potęgi n, wypada $y = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, rozwińmy drugą stronę równania według wzoru Newtona, otrzymamy

$$y = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.n.n}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.n.n.n}x^3 + \text{itd}$$

albo wykonywając naznaczone dzielenia wypadnie

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2}{1.2} + \frac{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}x^3 + \text{itd}$$

lecz gdy x jest logarytmem y, wtedy n jest nieskończenie wielkie, wszystkie zaś ilorazy $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$, itd nikną, bo ich granicą jest zero, będzie więc w takim przypadku

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{itd}$$ że zaś $e^x = y$ więc także

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \text{ itd.}$$ położywszy $x=1$ wypada

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{itd} = 2,7182818284 = e$$

z kąd się także pokazuje, że wzór $l'og\,y = n(y^{\frac{1}{n}}-1)$ kiedy $n=\infty$ służy dla logarytmów Neperowskich, w których $K=1$ jest więc

$$\text{I}\begin{cases} l'og\,y = n(y^{\frac{1}{n}}-1) \text{ kiedy } n=\infty\,; \\ e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{itd.} \end{cases}$$

II. Szukajmy logarytmu wyrażenia $1+u$. Mamy $l'og(1+u) = n\{(1+u)^{\frac{1}{n}}-1\}$ kiedy $n=\infty$ rozwijając $(1+u)^{\frac{1}{n}}$ według wzoru Newtona wypada

$$l'og(1+u) = n\left\{(1+u)^{\frac{1}{n}}-1\right\} = n\left\{1 + \frac{\frac{1}{n}u}{1} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}u^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.3}u^3 + \ldots - 1\right\}.$$

albo wykonawszy mnożenie naznaczone przez n i zniósłszy $+1$ i -1 jest

$$l'og(1+u) = \frac{u}{1} + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}u^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.3}u^3 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{2.3.4}u^4 + \ldots$$

lecz n jest $=\infty$ przeto ułomek $\frac{1}{n}$ którego granicą jest zero niknie w każdym czynniku — i jest

$$l'og(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} \frac{-1\times-2}{2.3}u^3 - \frac{1\times-2\times-3}{2.3.4}u^4 \ldots\ldots$$ albo

wykonywając narznaczone mnożenia pomiędzy spółczyn-
nikami i działań gdzie się to daje uskutecznić otrzymu-
jemy ostatecznie

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \ldots$$

biorąc zaś u ujemne gdy $(-u)^2 = u^2$ więc $-(-u)^2 = -u^2$ jest

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} \ldots$$

innych szeregów niewyprowadzamy, bośmy ich w ciągu dzieła
nie używali. —

III Zamieszczając tu tem, że we wzorze Newtona spółczynniki
jednakowo od środka oddalone są sobie równe mamy

1) $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 \ldots \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$

albo wziąwszy wyrazy z jednakowemi spółczynnikami
w pewnym przypadku

2) $(a+b)^n = (a^n + b^n) + nab(a^{n-2} + b^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^2(a^{n-4} + b^{n-4}) + \ldots$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3.\ldots m}a^m b^m (a^{n-2m} + b^{n-2m}) +$$

chcąc oznaczyć ostatni wyraz w szeregu dopiero uważanym,
potrzeba mieć koniecznie wzgląd na to, że n może być
albo parzyste, albo nieparzyste: w pierwszym przypadku
liczba wyrazów (w szeregu 1)) wynosi n+1, więc jest nieparzysta i
2) szereg ma jeden wyraz środkowy z osobnym
spółczynnikiem postaci $\frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$; albowiem
tako przed tym wyrazem jako i po nim znajduje
się $\frac{n}{2}$ wyrazów, więc najprzód co do spółczynnika środ-
czynnikowego, ponieważ w nim mnożą się czynniki
n, n-1, n-2, itd aż dotąd dopóki od n nie odejmie się
liczba wyrazów poprzedzających zmniejszona jednością

przeto, ostatni czynnik w tym liczniku jest $n-(\frac{n}{2}-1)=n-\frac{n}{2}+1=$
$\frac{n}{2}+1$ — w mianowniku zaś ostatni czynnik we wzorze Newtona
zgadza się zawsze z liczbą wyrazów poprzedzających więc jest $\frac{n}{2}$,
co się zaś tycze wykładników a i b te są sobie równe, są połową
liczby n. — ten środkowy wyraz szeregu 1) jest ostatnim wyra-
zem szeregu 2)

W drugim przypadku, kiedy n jest nieparzyste, szereg 1) ma wy-
razów n+1 to jest liczbę parzystą, znajdują się dwa wyrazy środ-
kowe z podobnemi spółczynnikami, przed wyrazem pierwszym środ-
kowym jest wyrazów $\frac{n+1}{2}-1$ czyli $\frac{n-1}{2}$, więc czynniki licznika są $n.\ n-1, \ldots$
$n-(\frac{n-1}{2}-1)=\frac{2n-n+1+2}{2}=\frac{n+3}{2}$ w mianowniku zaś $1.2.3\ldots$ ~~$\frac{n+1}{2}$~~ $\frac{n-1}{2}$ wreszcie
b jest podniesione do potęgi ~~$\frac{n+1}{2}$~~ $\frac{n-1}{2}$ a zatem a musi być podniesione
do potęgi $\frac{n+1}{2}$, w drugim wyrazie środkowym a jest podniesione
do tej potęgi co b w pierwszym i b do tej co a w pierwszym
~~jest~~ są więc wyrazy środkowe $\frac{n(n-1)\ldots\frac{n+3}{2}}{1.2\ldots\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}+\frac{n(n-1)\ldots\frac{n+3}{2}}{1.2.\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}$
biorąc więc $a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}$ za nawias, wypada w tym drugim przy-
padku jako wyraz ostatni dla szeregu 2)

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

Połóżmy teraz $a+b=y$ i według szeregu 2) starajmy się dwumiany
$a^{n-6}+b^{n-6}$, $a^{n-4}+b^{n-4}\ldots$ itd wyrazić. Zacznijmy od pierwszego, lubo
lepiej by było zacząć np. od $a^{n-10}+b^{n-10}$ — lecz że tu idzie tylko o spo-
sób postępowania, więc dla uniknienia rozwlekłego rachunku
obieramy i przestajemy na założonym — Stosownie do szeregu 2)
mamy $y^n=\cdot a^{n-6}+b^{n-6}\ldots(\alpha)$ dalsze wyrazy opuszczamy bo w na-
stępującym wyrazie już wchodzi $a^{n-8}+b^{n-8}$.
w szeregu 2) połóżmy dalej $n-4$ za n wypada
$y^{n-4}=a^{n-4}+b^{n-4}+(n-4)ab(a^{n-6}+b^{n-6})$ albo kładąc za $a^{n-6}+b^{n-6}$ wartość

ze zrównania (α) wypada $a^{n-4}+b^{n-4} = y^{n-4} - (n-4)aby^{n-6} \dots (\beta)$

Połóżmy dalej w szeregu 2) n-2 za n otrzymamy

$$y^{n-2} = (a^{n-2}+b^{n-2}) + (n-2)ab(a^{n-4}+b^{n-4}) + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^2b^2(a^{n-6}+b^{n-6})$$ albo

podstawiwszy wartości z (α) i (β) jest.

$$y^{n-2} = a^{n-2}+b^{n-2} + (n-2)aby^{n-4} \left. \begin{array}{l} -(n-2)(n-4) \\ +\frac{(n-2)(n-3)}{1.2} \end{array} \right| a^2b^2y^{n-6}$$

Idzie tylko o uproszczenie spółczynnika $a^2b^2y^{n-6}$ mamy

zaś $-\left\{(n-2)(n-4) - \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\right\} = -(n-2)\left\{\frac{2n-8-n+3}{1.2}\right\} = -\frac{(n-2)(n-5)}{1.2}$ i jest

$$a^{n-2}+b^{n-2} = y^{n-2} - (n-2)aby^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2}a^2b^2y^{n-6} \dots (\gamma)$$

Jeszcze w szeregu 2) ~~uproszczony przez~~ podstawmy wartości (α) (β). (γ) a będzie

$$y^n = a^n+b^n + naby^{n-2} \left. \begin{array}{l} -n(n-2) \\ +\frac{n(n-1)}{1.2} \end{array} \right| a^2b^2y^{n-4} \left. \begin{array}{l} +\frac{n(n-2)(n-5)}{1.2} \\ -\frac{n(n-1)(n-4)}{1.2} \\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \end{array} \right| a^3b^3y^{n-6}$$

Lecz $-n\left\{(n-2) - \frac{(n-1)}{1.2}\right\} = -n\left\{\frac{2n-4-n+1}{1.2}\right\} = -\frac{n(n-3)}{1.2}$.

Uważajmy najprzód dwa ostatnie wyrazy spółczynnika $a^3b^3y^{n-6}$

jest $-\frac{n(n-1)(n-4)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = -\frac{n(n-1)}{2}\left\{\frac{3(n-4)-(n-2)}{3}\right\} = -\frac{n(n-1)2(n-5)}{1.2.3} =$

$= -\frac{n(n-1)(n-5)}{3}$. Do tego wyrażenia potrzeba jeszcze dodać

pierwszy wyraz i jest $-\frac{n(n-1)(n-5)}{3} + \frac{n(n-2)(n-5)}{1.2} = +n(n-5)\left\{\frac{3n-6-2n+2}{2.3}\right\} =$

$= \frac{n(n-5)(n-4)}{2.3} = \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}$ więc po wyciągnieniu

wartości na a^n+b^n jest

$$a^n+b^n = y^n - naby^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}a^3b^3y^{n-6}.$$

W szeregu otrzymanym już można dostrzedz, lubo niewyraźnie, prawo według którego spółczynniki tworzą się, to prawo przedstawiłoby się o dalece wyraźniej gdybyśmy byli zawsze rozwijali $a^{n-10}+b^{n-10}$; według niego to otrzymujemy szereg następujący

$$\text{III} \quad a^n+b^n = y^n - naby^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.}a^3b^3y^{n-6} +$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}a^4b^4y^{n-8} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5}a^6b^6y^{n-10} + \ldots$$

i albo wyraz ogólny mamy

$$(-1)^m \frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m} a^m b^m y^{n-2m}$$

nareszcie ostatni wyraz, jeżeli n jest parzyste wypada $\pm 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$

jeżeli n nieparzyste $\pm na^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}y$.

znacko górny używa się wtedy kiedy $\frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ są parzyste dolny zaś nieparzyste. —

Szereg III dla każdego ~~spo~~ wykładnika dodatnego powinien być tak daleko posunięty dopoki wykładniki y wypadają dodatne. —

IV Uważajmy dwie liczby (całkowite) x, y, z których każda większa jest od trzeciej liczby całkowitej n. Według wiadomości algebraicznych liczba kombinacyi zrobionych z liczby $(x+y)$ ~~po~~ głosek po n głosek daje się wyrazić przez

$$\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n.}$$

to uważywszy, dajmy że głoski a. b. c. d. ... p. q. r. s. znajdujące się w liczbie równej $x+y$, rozdzielmy je na dwie gromady, tak iżby w jednej było x a w drugiej y głosek. Z pomiędzy kombinacyami robionemi z tych głosek, znajdą się takie które zawierają tylko

będą głoski pierwszej gromady. Liczba kombinacyi tego rodzaju będzie: $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n.}$

Inne zamykać będą $n-1$ głosek z pierwszej gromady i jedne głoskę z drugiej gromady. Liczba takich kombinacyi daje się łatwo łatwo oznaczyć, bo się wyraża przez

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}$$ podobnie znajdziemy

że liczba kombinacyi zrobionych, po wziętu $n-2$ głosek z pierwszej gromady a po dwie głoski z drugiej, wyraża się przez

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.\,2.\,3.\ldots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.\,2.}$$ i tak dalej, nareszcie

że liczba kombinacyi zrobionych po jednej głosce z pierwszej gromady, a po $n-1$ z drugiej jest

$$\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+2)}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}$$ i nakoniec liczba

kombinacyi zrobionych po n głosek wszystkich z drugiej gromady wynosi $\frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n.}$

~~Liczba~~ Summa tych odmiennych rachunków kombinacyi powinna zawsze wydać liczbę kombinacyi zrobionych z $(x+y)$ głosek po n głosek więc jest.

$$(A)\quad \frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n.} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n} + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.\,2\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.\,2.\,3.\ldots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.\,2}\ldots\ldots\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+2)}{1.\,2.\,3.\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots n.}$$

Jeżeli w dopiero otrzymanym równaniu położymy $\frac{x}{2}$. $\frac{y}{2}$, zamiast x i y – mieć będziemy

$$\text{IV}\quad \frac{(x+y)(x+y-2)\cdots\cdots(x+y-2n+2)}{2.\,4.\,6.\cdots\cdots 2n} = \frac{x(x-2)\cdots(x-2n+2)}{2.\,4.\,6.\;\;2n} +$$

$$+ \frac{x(x-2)\cdots(x-2n+4)}{2.\,4.\,6\cdots(2n-2)}\,\frac{y}{2} + \cdots\cdots \frac{x}{2}.\,\frac{y(y-2)\cdots(y-2n+4)}{2.\,4.\,6.\;(2n-2)}$$

$$+ \frac{y(y-2)\cdots\cdots(y-2n+2)}{2.\,4.\,6.\;\;2n}$$

Wprawdzie wzór (α) jest tu tylko okazany dla przypadku kiedy x i y większe są od n. jest on przecież i w innych przypadkach prawdziwym. Jeżeli albowiem tak x jako i y każde dla siebie mniejsze jest od n, wtedy w szeregu (α) na drugiej stronie wyraz pierwszy i ostatni znajdować się nie może, bo kombinacye z x głosek albo y głosek po n głosek, skoro x<n i y<n zrobione być nie mogą, lecz też właśnie w takim przypadku, wyraz pierwszy i ostatni nikną, bo te wyrazy mają w licznikach czynniki x, x-1, x-2, ...(x-n+1). i y. y-1, y-2, (y-n+1), które powstają przez to, że od x i od y odejmuje się, 1. 2. 3... aż do n-1, a że x<n i y<n, więc w tem odejmowaniu pomiędzy liczbami 1. 2. 3... trafia się liczba x i y która jeden z czynników postaci x-x lub y-y przyprowadza do zera a tem samem i cały licznik; przez co te wyrazy nikną — Nawet z pośrednich wyrazów zniknąć wszystkie te w których od x lub od y przychodzi odejmować liczby 1.2.3. z których ostatnia przewyższa x lub y i dopiero te pozostaną w których od x i y odejmują się mniejsze liczby porządkowe niż x i y — wszakże szereg jako powiedzieliśmy

na początku jest prawdziwy, bo się z niego daje otrzymać prawdziwa liczba kombinacyi. Toż samo rozumie się o przypadku, kiedy $x>n$ a $y<n$ i kiedy $x<n$ a $y>n$.

4410